中國偉大數學家—秦九韶

數學科　劉宗豪老師

壹、前言

秦九韶，字道古(公元 1202～1261)，南宋數學家，與李治、楊輝、朱世傑齊名，同為中國數學黃金年代之宋元時期的四大數學家。性極機巧，星象、音律、算術以至營造等事無不精究，遊戲、球、馬、弓、劍，莫不能知。

他生活在南宋末年，捲入南宋統治集團戰和兩派的鬥爭，因支援抗戰派吳潛而屢遭誣陷。賈似道專權後被貶到梅州，死於任所。

秦九韶的父親在南宋朝廷裏當一名不大的官，他跟隨父親居住在杭州，因而有機會向太史學習天文、曆法，又同隱君子學習數學。18 歲那年，他返回故鄉，舉義抗元，為義兵的首領，後來，他又到四川當過縣尉。淳祐四年〔公元 1244 年〕為建康通判，不久母喪，還家守孝服喪。

在這期間，他深覺數學是精妙的學問，於是窮畢生之力把歷年積累下來的數學研究成果加以整理，於淳祐七年〔公元 1247 年〕九月，寫出《數書九章》十八卷。

《數書九章》是一部劃時代的數學巨著。全書共 81 道題，分為九大類：大衍類、天時類、田域類、測望類、賦役類、錢谷類、營建類、軍旅類、市易類。

全書實用性強，所設問題複雜，解題步驟詳細。其中對「大衍求一術」〔一次同餘組解法〕和「正負開方術」〔高次方程的數值解法〕等有十分深入的研究。在線性方程組的解法上，完全以互乘相消法取代直除法，提出了與海倫公式等價的三斜求積公式。

關於一次同餘式問題，最早是在成書於公元四、五世紀的《孫子算經》「物不知數」中出現，但對此問題給以理論上的說明，是由秦九韶給出。

西方則到 18,19 世紀時，才由歐拉〔Euler，公元 1707-1783 年〕、高斯〔Gauss，公元 1777-1855 年〕獲得與「大衍求一術」相同的定理。至於求高次方程的數值解法，是秦九韶在賈憲、劉益的基礎上推廣而來的。

英國數學家霍納〔Willian George Horner，1786-1837〕在 1819 年才發表與「正負開方術」一樣的霍納法。

貳、正文

一、三斜求積公式

設三角形三邊分別為 a,b,c ，則三角形面積為： $S=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})}$

在其著作《數書九章》中的卷五有一題:”問沙田一段,有三斜(三角形三邊),其小斜一十三里($c=13$)，中斜一十四里 $b=14$ ，大斜一十五里 $a=15$ ，里法三百步(每三百步為一里)，欲知為田幾何？”

“術曰：以少廣求之，以小斜冪(c^2)併大斜冪(a^2)減中斜冪(b^2)，餘半之，自乘於上;以小斜冪乘大斜冪減上,餘四約之(除以 4),為實;一為從隅($p=1$)，開平方得積。”

若我們設 $x=\frac{a+b+c}{2}$ 代入上述公式可得

$$S^2=\frac{1}{16}[(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2]=\frac{1}{16}[(a+c)^2-b^2][b^2-(c^2-a^2)]$$

$$=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)=x(x-a)(x-b)(x-c)$$

即 $S=\sqrt{x(x-a)(x-b)(x-c)}$

西方稱此公式為”海倫公式”，而早在古希臘時，阿基米德(Archimedes)就已知此公式，只是海倫在其著作《量度》一書中給出了這公式的證明，因而得名。

二、大衍求一術

此術的思想起源來自於約公元 220 年約漢朝以後所發行的一本書，名為「孫子算經」。當中記載了一道問題如下:『今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？』答約:『二十三』。

將上述問題翻譯成白話則為：

這裡有一些東西，不知道有幾個；三個三個去數將剩餘兩個、五個五個去數將剩餘三個、七個七個去數將剩餘兩個，請問這東西有多少個？

用數學式來看即：有一數，用 3 除之餘 2、用 5 除之餘 3、用 7 除之餘 2，試問此數為何？

用現代符號表示為 $N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$，其最小正數解是 23。

《孫子算經》中給出了其中關鍵的步驟是：凡三三數之剩一，則置七十；五五數之剩一，則置二十一；七七數之剩一，則置十五。

因此可設 $N=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105=23$。

原題及其解法中的 3、5、7 後來叫“定母”，70、21、15 叫“乘數”。

但在《孫子算經》中並沒有說明求乘數的方法，直到 1247 年宋代數學家秦九韶在《數書九章》中才給出具體求法。

70 是 5 與 7 最小公倍的 2 倍，21、15 分別是 3 與 7、3 與 5 最小公倍數的 1 倍。秦九韶稱這 2、1、1 的倍數為“乘率”，求出乘率，就可知乘數。

《數書九章》給出求乘率的方法，稱之為「大衍求一術」。

例題：今有五公升和三公升的杯子，是否可倒出一公升的水？

解：

1. 先找出 5 和 3 的最大公因數，也就是 $(5,3)=1$
2. 再者設 5 和 3 的某種線性組合使得 $5x+3y=1$
3. 當 $x=2$、$y=-3$ 時成立，或可解釋為倒滿兩次五公升的杯子，倒掉三次三公升的杯子即可獲得一公升水。

例題：韓信某天於校場點兵，每 5 人一數餘 3 人、每 9 人一數餘 5 人、每 13 人一數餘 7 人，試問他擁有的兵量最少為何？

解：

設人數為 X
X 除以 5 餘 3，X 除以 9 餘 5，X 除以 13 餘 7
則 2X 除以 5 餘 6，2X 除以 9 餘 10，2X 除以 13 餘 14

即 2X 除以 5 餘 1，2X 除以 9 餘 1，2X 除以 13 餘 1

$2X=5\times9\times13\times Y+1$ ， 由 2X 為偶數，可知 Y 為奇數

令 $Y=2y+1$ 代入

使得 $2X=5\times9\times13\times(2y+1)+1=5\times9\times13\times2y+285+1$

因此 $X=5\times9\times13\times y+143$

故可知最少為 143 人

參、結論

翻開中國數學歷史來看，數學在中國的發展源遠流長，許多偉大的數學家及其發明，更為外國數學家所參考之來源。在宋、元兩代，籌算數學達到極盛，是中國古代數學空前繁榮的全盛時期。而秦九韶是眾多數學家中的一人而已，但其論述卻影響了後代甚巨，尤其大衍求一術在現今數學領域中，應用於日常生活上之廣泛，也是現代學者所極為推崇的。

在西方，直到 18 世紀中葉和 19 世紀初，數學家歐拉（1707－1789 年）和高斯（1777－1855 年）等人才對聯立一次同餘式方程進行了較為深入的研究，並得到了與秦九韶的「大衍求一術」相同的結果，但這已經是五百年以後的事了。也正因為如此，歐美的整數論者都十分推崇秦九韶的偉大貢獻，並把他的「大衍求一術」稱為「中國的剩餘定理」。

在此，僅根據教學先輩們所提出的相關資料，做簡單的介紹罷了。也希望後進的學子們，有興趣鑽研數學者，能更加深入探討各時期所提出的偉大論述，中國也好西方也罷，都是值得我們學習的。

肆、參考資料

一、黃家禮《幾何明珠》

二、文耀光：大衍求一術與二元一次不定方程

三、李政豐：當大衍求一術結合 EXCEL 與 MAPLE

四、中國數學史