生活中的數學機率

數學科　李芳俞老師

壹、前言

台灣彩卷原本推出的 42 選 6 樂透彩，在一開始可說是全民運動，隨著時間的冷卻，慢慢地彩卷的銷售不再如此熱絡，為了刺激買氣及增加刺激度，因而把原先樂透彩改成 49 選 6 大樂透及威力彩，獎金更高更吸引人，但常有人比喻中頭獎的機率比被雷打到的機率還要低，真的嗎？

機率統計為中學數學課程中之一重要的領域,但學生往往在學習上感到困難。我們在這篇研究中，將先從機率的發展來介紹，進而對樂透彩「熱門數字」加以統計分析，並探討其背後所帶來的迷思。

希望藉此篇文章讓學生親身初步體驗何謂機率統計，培養學生對數字有相當的敏銳度及生活體驗；藉由活動的參與及引導問題的探索，能知道機率的實際相關應用，體察生活中數學的樂趣及應用性，獲得衡量「公平性」與「最佳決策」的生活概念。

貳、正文

一、機率文學

我們從英國文獻中發現十四世紀中期，詩人 Chaucer 已有一些機率的概念，十六世紀中期，陸續出現「勝率」及丟骰子結果等與機率有關之具體描述。本文由十七世紀以前的英國文學及中古英文字典等資料中，檢視古代慣用字與現代機率之關聯，藉以瞭解早期機率的應用情形。

CHANCE〔機運〕：這個字早在西元一千三百年左右，即已出現在中古英文字典中，且用法幾乎與骰子畫上等號。在當時的英國詩人 Chaucer 已有此概念。另從 Hammond 的詩中(The chance of the dice)，認為擲三個骰子的結果，以三個同時出現一點的機率最小，並於詩中以此代表不幸。

DICE〔骰子〕：在 Nicholas Breton(1582)的詩中曾提到，紙牌和骰子都是不會騙人的，端看你如何玩它。人們常將骰子分為公正骰子（上帝的手-機率）及不公正骰子(人造的手-非機率)兩種，使得骰子無形中與機率相結合。

ODDS〔勝率〕：早在十六世紀，編劇家及神學家就使用數字或文字來描述勝率大小，如亨利八世的宮廷老師 John Palsgrave(1530)曾寫下「現在要使人遠離賭局,只需將勝率調降到二十分之一,他就永遠不玩了」。另一個例子,是 Thomas Dekkew(1607)所寫的一段戲劇對話「誰對我較忠實呢？是我老婆，還是 Tenterhook？」「喔！你老婆勝率較高吧」，即以文字描述勝率之情形。

LOTS〔籤〕：抽籤常被應用在宗教事務上，例如在耶路撒冷的宮殿裡，常用抽籤來決定祭師的順序和他們的職責；十五世紀，修道院亦用抽籤來分配牧草地，此法並延用至十九世紀。在中古世紀社會，抽籤常被用於財產之分配。

LOTTERY〔彩券〕:歐洲彩券源於中世紀,英國則遲至一五六六年才發行彩券。雖然無從得知發行彩券者有否能力精確計算出各種中獎機率，但由當時獎品價值愈高，其中獎機率愈低來看，彩券發行者應對事件發生的機率已有大小的認知，並且有簡單的期望值概念。 （註一）

二、機率簡史

（表一）

年代	事件
1656	惠根斯聽聞到有關於巴斯卡和費馬的書信往來內容，利用期望值的概念，發表一篇短篇文章「論賭博的計算」，這是機率論的第一篇正式著作。
1718	棣美弗－「機會論(Doctrine of Chances)」一書中，首次定義獨立事件，並舉出很多擲骰子的相關問題和遊戲，對機率論貢獻相當大。
1733	棣美弗推得常態分佈曲線，並提出二項分佈近似常態分佈的概念，此常態近似結果又稱為「棣莫弗—拉普拉斯（De Moivre－Laplace）定理」。
1810~1812	拉普拉斯 1810 年－「中央極限定理」。 1812 年－「機率的分析理論」一書中，明確地提出古典機率定義。
1837	波松機率論中,描述一段時間內，發生隨機事件的機率之分佈－「波松分佈(Poisson Distribution)」。

年代	事件
1875	高爾頓提出四分位數(Quartiles)的定義
1893	卡爾皮爾生－測量資料離散程度的標準差，即「均方根」。
1894	卡爾皮爾生－集中趨勢中的眾數概念。
1898	卡爾皮爾生創立敘述統計學。
1939	韋伯(Weibull, 1887-1979)首度發表的韋伯分佈，是描述壽命資料非常常用的統計模型。
1948	耶茨最先發表「系統抽樣」。

（註二）

三、機率的定義與性質

1.機率的定義－拉卜拉斯的古典機率

A.設某一隨機試驗的樣本空間 S 由 n 個樣本點組成，假設每一個樣本點出現的機會均等，事件 A 由 m 個樣本點組成，其中 n、m 為自然數，且 m □ n，則事件 A 發生的機率為：

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{m}{n}$$

B、以在多次重覆實驗後，一事件出現的頻率來表示機率，此即統計的定義，或客觀的解釋。

C、以觀察者對一事件的相信程度來定義機率，此即主觀的觀點。

2.機率的性質

由古典機率的定義，可以得到下列的機率性質，若 S 為樣本空間，A、B 為事件，則:

A.標準化：

必然發生的事件其機率為 1，(即 P(U)=1)，而必然不會發生的事件機率為 0，即 P(Φ)=0，其中 S 為樣本空間。

B.機率的範圍：

每一個事件發生的機率必在 0 與 1 之間，即 A 為任一事件，則 0 □P(A) □ 1 .

C.加法法則：

若 A，B 為互斥事件，則事件 A，B 至少有一件發生的機率，等於各個事件發生的機率和，即 P(AUB) = P(A) + P(B) .

D、減法法則：在一次試驗中，某事件發生的機率是 P，則在該次試驗中該事件不發生的機率是 1-P。

E、乘法法則：

如果某事件的發生機率是 P_1，而是另外一件獨立事件發生的機率是 P_2，則兩事件全都發生的機率是兩者的乘積，即 P_1P_2。

F、獨立事件：

如果「知道兩個隨機現象其中之一結果」不會改變另一個結果的機率，就稱這兩個隨機現象獨立。(註三)

四、生活中機率之應用—樂透彩

1.遊戲規則

必須從 01~49 中任選 6 個號碼進行投注。開獎時，開獎單位將隨機開出六個號碼加一個特別號，這一組號碼就是該期 49 選 6 大樂透的中獎號碼，稱為「獎號」。

2、各獎項的中獎方式如下表：

（表二）

中獎方式	獎項	中獎方式圖示
與當期六個獎號完全相同者	頭獎	●●●●●●
對中當期獎號之任五碼 ＋特別號	貳獎	●●●●●○
對中當期獎號之任五碼	參獎	●●●●●
對中當期獎號之任四碼 ＋特別號	肆獎	●●●●○
對中當期獎號之任四碼	伍獎	●●●●
對中當期獎號之任三碼 ＋特別號	陸獎 NT$1,000	●●●○
對中當期獎號之任三碼	普獎 NT$400	●●●

（註四）

3. 貳獎到普獎中獎機率

計算公式:在 n 個不同的項目中，任取 r 個為一組之方法個數。

$$c_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

（表三）

中獎情形	中獎機率
頭獎	$\frac{C_6^6}{C^{49}} = \frac{1}{13,983,816}$
貳獎	$\frac{C_5^6 C_1^1}{C_6^{49}} = \frac{6}{13,983,816}$
參獎	$\frac{C_5^6 C_1}{C_6^{49}} = \frac{6}{13,983,816}$
肆獎	$\frac{C_4^6 C_1^1 C_1^{42}}{C_6^{49}} = \frac{630}{13,983,816}$
伍獎	$\frac{C_4^6 C_2^{42}}{C_6^{49}} = \frac{12,915}{13,983,816}$
陸獎	$\frac{C_3^6 C_1^1 C_1^{42}}{C_6^{49}} = \frac{17,220}{13,983,816}$
普獎	$\frac{C_3^6 C_3^{42}}{C_6^{49}} = \frac{229,600}{13,983,816}$
加總	$\frac{260,624}{13,983,816}$=1.864%

（註五）

參、結論

1. 大樂透中獎機率加總僅約 1.864% ，換句話說，損龜機率高達 98.136%，而中頭獎的機率(千萬分之一)比被雷擊中的機率(50 萬分之一)來的低。因此不論是哪

一種玩法之樂透彩，中獎機率皆比不中獎低很多。

2.假設買一張 50 元的彩卷，則預計樂透彩期望值為 25.46 元，也就是說，投資報酬率只有 25 元。在一般情況下，彩券的獲利期望值為負數（因為政府要抽稅、賣彩券的企業要抽佣）但是，在某些特別的情況下，買彩券的期望值卻可能成為正數。當連續多期彩券「摃龜」後，彩金愈積愈高，跨過一個臨界點後，抵消了政府抽稅與企業抽佣的劣勢，獲利期望值才會由負轉正。

3.若是想要穩中必須要 13,983,816 種組合全買，要花將近七億元，除非頭彩累積多期，開獎後由一人獨得才划算。

4.機率的語言常常出現在我們的生活週遭，舉凡樂透彩、下注、打賭、氣象報導等等。在這些不確定的事件中，往往需要利用統計與機率的分析來幫助我們了解許多現象，甚至是引導我們去做判斷；因此，我們不得不重視這樣的語言下所代表的真實意義

肆、引註資料

註一：行政院主計處。主計故事
http://www.dgbas.gov.tw/ct.asp?xItem=1554&ctNode=99

註二：機率學習館。
http://eprob.math.nsysu.edu.tw/ProbHistory/機率年表.htm

註三：普通高級中學數學第四冊龍騰文化。

註四：台北銀行。http://www.roclotto.com.tw/

註五：張振華。《機率好好玩》。台北市：博雅書屋有限公司，2009。