

生活中的數學--函數

數學科 黃志龍老師

電機科 余丞閔同學

壹、前言

此次藉由優質化的活動，鼓勵教師與同學間共同發表文章，起初與同學研究還不能很確定要選那個題目，在某次上課中，有同學提出學數學有何用，此時靈光乍現，何不寫生活中的數學呢？於是決定寫生活中的函數，並請學生找相關資料，此篇文章針對函數的源起、定義、種類及值有詳細的介紹，藉由生活中的例子，來說明函數，希望藉此篇文章讓同學對函數有更深層體認，及對數學能提起興趣，不要再說學數學無用，更感謝提供資料的先進，資料若有缺漏或不足之處，敬請不吝指教。

貳、正文

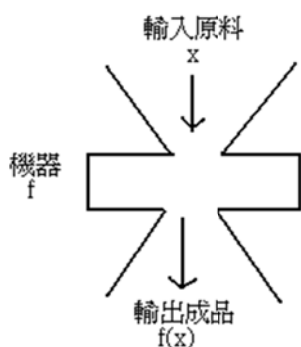
一、函數的源起

文藝復興以後，西方的科學觀，可以 Galileo Galilei (1564~1642 年) 的看法為代表。他認為大自然是依數學方式建構的，人只要掌握各種現象的基本數學關係，就可以靠數學加以推演。將自然科學數量化，尋求其間的數學關係並加以推演，就成了研究自然科學的新方法。科學革命對數學的影響之一就是促使函數觀念漸趨成熟；當然，函數觀念的成熟也使科學研究帶來許多方便。

Galilei 研究落體運動，發現「物體在空中下降的距離（從靜止開始計算）與所經過時間的平方成正比」、「物體從高度固定的斜板滑落所需的時間與斜板的長度成正比」。也就是說他發現了距離與時間或時間與長度之間的數學關係。距離隨時間而變或時間隨長度而變，用現在的說法就是：距離是時間的函數或時間是長度的函數。研究運動也引出更多的曲線——點動成曲線，而曲線和函數之間，也經由解析幾何的引入，變得不可分離。用坐標的方法研究曲線，就是把曲線以 x 、 y 的關係式表示，然後用代數的方法加以處理。

二、函數的定義

在一個 x 與 y 的關係式裡，對於每一個 x 值，都只有一個 y 的對應值，那麼這種關係就說 y 是 x 的函數，也就是說函數是一種特殊的對應關係。生活中常見的函數，例如每個人皆有自己的身高，所以人和身高之間的對應為一函數、每月水電費＝時間＊費率＋基本費、溫度轉換：華氏溫度＝攝氏溫度＊1.8＋32、正方形周長＝4＊邊長或三角形面積＝ $\frac{1}{2}$ ＊底＊高。



(一)、函數表示法：

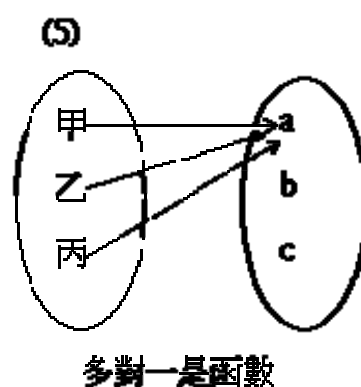
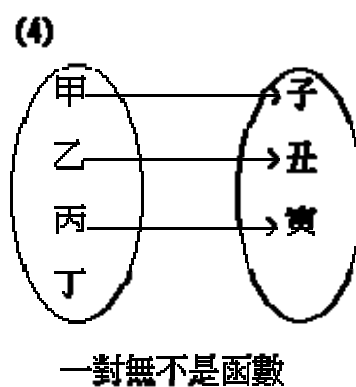
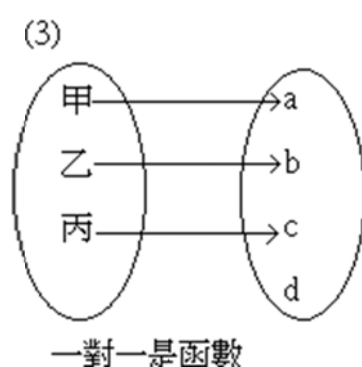
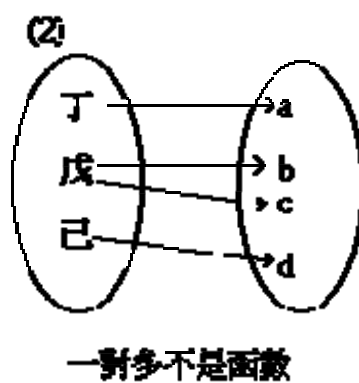
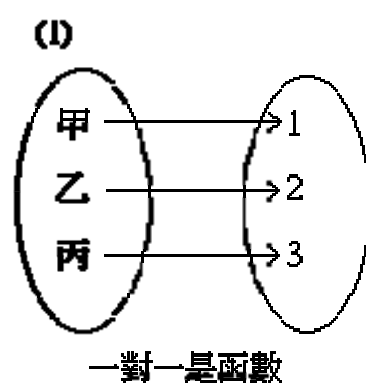
1、當 y 是 x 的函數時，我們用符號 $y=f(x)$ ，或 $y=g(x)$ 來表示。

2、函數 $f(x)$ 不念成 f 括號 x ，而要讀做 f of x ，而 $f()$ 中的括號“()”表示機器的入口，當我們把原料“1”輸入，即得到輸出成品 $f(1)$ ；當我們把原料“2”輸入，就得到輸出成品 $f(2)$ ；所以當我們把原料“ x ”輸入，即得到輸出成品 $f(x)$ ，如圖。

(二)、函數的判別：一對一或多對一是函數。一對多或一對無不是函數。

說明：

- 1、一個人買車票後，從台北車站搭火車南下，每個人只能在一個車站下車（一對一），但是卻有很多人在同一車站下車（多對一）---> 是函數關係，而不能搭上車後沒有車站下車（無目的地）（一對無）---> 不是函數關係（註：多對1是函數關係）
- 2、一個人必須有一個父親（一對一）（養父、乾爹不算），一家中有三個兄弟姊妹，父親為同一人（多對一）（同母異父不算）----> 是函數關係
- 3、一個人沒有父親（生父）--> 一對無（雖為養子，不可能沒有父親）----> 不是函數關係
- 4、一個人有好幾個父親--> 一對多（義父、乾爹不算）----> 不是函數關係
- 5、. 我們再以例子詳細說明函數關係，以使學生進一步瞭解：



三、函數的種類



(一)、多項式函數：

若以 y 是 x 的函數來說，由於 y 是隨著 x 而改變，所以，我們可以把注意力放在 x 身上。以 x 的次方來決定， y 是一個什麼樣的函數。

1、當 x 是 0 次方，也就是常數時，我們把它叫作常數函數，也叫作零次函數，如 $y = 2$ ， $y = -4$ ， $y = 0.5$ 都是。【注意】但是習慣上，0(零)不叫作零次函數，而是稱為「零函數」。

2、當 x 是 1 次方，我們把它稱為一次函數，也叫作線型函數，如 $y = 3x$ ， $y = -4x$ ， $y = 0.5x$ 都是。

3、當 x 是 2 次方，我們把它稱為二次函數，設 a 、 b 、 c 為常數且 $a \neq 0$ ，則 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 所表示的函數叫做二次函數，其圖形為拋物線。

二次函數的基本概念：

(1)、二次函數其圖形為軸對稱的拋物線圖形。

- (2)、若平方項係數為正，則開口向上；若平方項係數為負，則開口向下。
- (3)、若平方項係數的絕對值較大，則開口較小；若平方項係數的絕對值較小，則開口較大。
- (4)、 $y=(x-h)^2$ 的圖形是將 $y=x^2$ 向右平移 h 單位長。
- (5)、 $y=x^2+k$ 的圖形是將 $y=x^2$ 向上平移 k 單位長。
- (6)、 $y=(x-h)^2+k$ 的圖形是將 $y=x^2$ 向右平移 h 單位長，再向上平移 k 單位長。
- (7)、二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0$) 的頂點坐標為 (h, k) ，對稱軸方程式為 $x=h$ 。

4、當 x 是 3 或以上，仍然依此類推。

(二)、分式函數 fraction

分式 fraction：一般指的是有理式 rational expression，即分子與分母均為多項式的分式；可分為真分式與假分式：

1、真分式 proper rational function or proper fraction：

分子次方小於分母次方者

例： $\frac{2}{x+1}$ ； $\frac{4x^2+6x}{x^3-x+5}$

2、假分式 improper fraction：

分子次方不小於分母次方者

例： $\frac{3x^2+2}{5x^2-2x}$ ； $\frac{3x^2+2}{50x-2}$

註：分式之判斷是以分子次方與分母次方為依據而非其係數

例：

$\frac{\sqrt{2}x+100}{x-1}$ (假分式)； $\frac{x^2+1}{100x^2+x-\sqrt[5]{3}}$ (假分式)

$\frac{188x-95}{x^2+x-1}$ (真分式)

3、若是將假分式 = 整式 + 真分式，稱為帶分式；

例如：1. $\frac{3x^2+2}{5x^2-2x} = \frac{3}{5} + \frac{-\frac{6}{5}x+2}{5x^2-2x}$ (以綜合除法解之)

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \text{商} + \frac{\text{餘式}}{\text{分母}}$$

$$2. \quad \frac{3x^2 + 2}{5x - 2} = \frac{3}{5}x + \frac{6}{25} + \frac{\frac{62}{25}}{5x - 2}$$

4、部分分式 partial fraction

只有真分式才能使用部分分式；假分式必需先化為帶分式，後真分式的部分才能使用部分分式，若一個真分式 $Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ （分子 $p(x)$ 之次方低於分母 $q(x)$ 之次方）且 $p(x)$ 與 $q(x)$ 無公因式 common factor，此時可依分母因式分解 factoring or factorization 之情形，將之分解成數個小的真分式，此法稱之為**部份分式法** (partial fractions)，例如：

$$\frac{2x-10}{x^2-6x+8} = \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{x-4}$$

解部分分式的方法有好幾種，一般最常用有代入法 substitution 與比較係數法；以下依分母因式分解後之形式來說明：

(1) 相異的線性因式 nonrepeated linear factors：

例：
$$\frac{2x-10}{x^2-6x+8}$$

解：分母 $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ 為兩相異之一次因式，令

$$\frac{2x-10}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$

通分後，分子部份為 $2x-10 = A(x-4) + B(x-2)$

使用代入法：以 $x=2$ 代入得 $-6 = -2A$ ， $A=3$

以 $x=4$ 代入得 $-2 = 2B$ ， $B=-1$

故得
$$\frac{2x-10}{x^2-6x+8} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-4}$$

(2) 部份線性因式重覆者 repeated linear factors，如 $(ax+b)^n$ ：

例：
$$\frac{4x^2-2x-14}{(x+1)^2(x-3)}$$

解：設 $\frac{4x^2 - 2x - 14}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

通分後分子為 $4x^2 - 2x - 14 = A(x+1)^2 + B(x-3)(x+1) + C(x-3)$

代入法以 $\begin{cases} x=3 & \text{代入得：} 36-6-14=16A, A=1 \\ x=-1 & \text{代入得：} 4+2-14=-4C, C=2 \end{cases}$

再以比較係數法：

比較 x^2 項係數： $4 = A + B$ ， $B = 3$

則得

$$\frac{4x^2 - 2x - 14}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \quad \#$$

(3) 相異一，二次因式 irreducible quadratic factor 混合者：

例： $\frac{4x^2 - 2x + 13}{(x-1)(x^2 + 4)}$

解：設 $\frac{4x^2 - 2x + 13}{(x-1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$

通分後分子部份為

$$4x^2 - 2x + 13 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x-1)$$

以 $x=1$ 代入得： $4-2+13=5A$ ， $A=3$

比較 x^2 項係數： $4 = A + B$ ， $B=1$

常數項係數： $13 = 4A - C$ ， $C=-1$

則得 $\frac{4x^2 - 2x + 13}{(x-1)(x^2 + 4)} = \frac{3}{x-1} + \frac{x-1}{x^2 + 4}$

(4) 含二次因式重覆 repeated irreducible quadratic factors 者：

例： $\frac{-3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}$

解：設 $\frac{-3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$

通分後分子部份為

$$\begin{aligned} -3x^2 + 2x - 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \end{aligned}$$

依次方比較兩邊係數得

$$\begin{aligned}
0 &= A \\
-3 &= B \\
2 &= A + C, C = 2 \\
-3 &= B + D, D = 0
\end{aligned}$$

則得

$$\frac{-3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

(三)、高斯函數：若 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ 為小於或等於 x 的最大整數，則稱 f 為高斯函數。

(四)、奇函數與偶函數：對任意一個屬於函數定義域的元素 ($x \in D_f$)，若 $f(-x) = -f(x)$ ，則稱 f 為奇函數；對任意一個屬於函數定義域的元素 ($x \in D_f$)，若 $f(-x) = f(x)$ ，則稱 f 為偶函數。

(五)、反函數：若對於 f 的定義域中每一 x ，恆有 $f(g(x)) = x$ ，且對於 g 的定義域中每一 x ，恆有 $g(f(x)) = x$ ，則稱 g 為 f 的反函數或 f 為 g 的反函數，又可稱 f 與 g 兩函數互為反函數。

四、函數的值

不管是幾次函數，其函數值的計算方式都相同，也就是將 x 的值代入式子中，求出 y 之值。

例如 $y = 3x$ ，當 $x=1$ 時之函數值=? $y = 3 \times 1 = 3$

$y = -4x$ ，當 $x=-2$ 時之函數值=? $y = (-4) \times (-2) = 8$

$y = 22x$ ，當 $x=5$ 時之函數值=? $y = 22 \times 5 = 110$

$y = 213x$ 當 $x=3$ 時之函數值=? $y = 213 \times 3 = 639$

數學家為了方便表示函數，也利用了一個符號來表示函數： $y=f(x)$ ，其中 f 是 function 的第一個字母。

利用這個符號來表示函數， $y = 3x$ 就可以寫成 $f(x)=3x$ ，從 $f(x)=3x$ 這個式子更可以發現函數完全是被 x 所「控制」了。

因此 $y = 3x$ ，當 $x=1$ 時之函數值=? 可以改寫成 $f(x)=3x$ ，求 $f(1)=?$ 明顯地 $f(1)=3 \times 1 = 3$ 。

好了，來挑戰一下你的反應能力，已知 $f(x) = 3x$ ，求 $f(f(-2))$ 之值=?

首先想想看， $f(f(-2))$ 是什麼意思呢？它的意思是在 $f()$ 裡面放入一個數字叫「 $f(-2)$ 」， $f(-2)=-6$ ， $f(f(-2))=f(-6)=-18$ ，此種類型稱為合成函數。

參、結論

經由以上重點的資料的蒐集，使我對函數有更深層認識，原本在國中數學程度不好，透過本次活動，也讓我對數學重新燃起希望，最後感謝此次協助幫忙我完成作品的老師。

肆、引註資料

一、書籍資料：

1. 九章編輯部，中學數學實用辭典，九章出版社。
2. 李文林著，數學史概論，九章出版社。
3. 凡異編輯部，探索數學的故事，凡異出版社。
4. 王世仁，觀念微積分，時新出版社。

二、網路資料：

1. ”昌爸工作坊”，<http://www.mathland.idv.tw/>。
2. ”數學知識”，<http://episte.math.ntu.edu.tw/>