篇名：

漫談數學

作者：

劉宗豪老師。高雄縣私立高英高級工商職業學校。

壹、前言

數學是研究數量、結構、變化以及空間模型等概念的一門學科。透過抽象化和邏輯推理的使用，由計數、計算、量度和對物體形狀及運動的觀察中產生。數學家們拓展這些概念，為了公式化新的猜想以及從合適選定的公理及定義中建立起嚴謹推導出的真理。

基礎數學的知識與運用總是個人與團體生活中不可或缺的一塊。其基本概念的精煉早在古埃及、美索不達米亞及古印度內的古代數學文本內便可觀見。從那時開始，其發展便持續不斷地有小幅的進展，直至 16 世紀的文藝復興時期，因著和新科學發現相作用而生成的數學革新導致了知識的加速，直至今日。

今日，數學被使用在世界上不同的領域上，包括科學、工程、醫學和經濟學等。數學對這些領域的應用通常被稱為應用數學，有時亦會激起新的數學發現，並導致全新學科的發展。數學家也研究純數學，也就是數學本身，而不以任何實際應用為目標。雖然許多以純數學開始的研究，之後會發現許多應用。

貳、數學的由來

數學（mathematics；希臘語：μαθηματικά）。

這一詞在西方源自於古希臘語的μάθημα（mthēma），其有學習、學問、科學，以及另外還有個較狹意且技術性的意義－「數學研究」，即使在其語源內。其形容詞μαθηματικός（mathēmatiks），意義為和學習有關的或用功的，亦會被用來指數學的。

其在英語中表面上的複數形式，及在法語中的表面複數形式 les mathmatiques，可溯至拉丁文的中性複數 mathematica，由西塞羅譯自希臘文複數τα μαθηματικά（ta math ē matik），此一希臘語被亞里士多德拿來指「萬物皆數」的概念。

參、學習數學的好處

數學與自然的特殊關係，使得數學成為人的發展中不可或缺的主要內容。數學不僅給人以應用的數學知識，更為重要的是，數學給人如何運用數學去看待世界、去認識自然的方法。通過數學，使人掌握宇宙發展的普遍規律。因此，數學對人的世界觀的形成具有特殊作用。

再者，數學是一種思維形式，是思維創造的產物，表現著人類智慧本質與特徵。數學活動是智力體操與創造發明的活動，其對人的科學思維與創新意識、創新能力培養起著重要的作用。

同時我們還看到，數學物件具有雙重性，它的理論是思維創造的產物，而非客觀世界中的真實存在。客觀世界中不存在數學中的點、線、面、三角形、圓，數學中的概念、命題等都是抽象思維的產物。然而，究其內容而言，數學物件則又具有明確的客觀意義，它是人的思維對於客觀現實的正確反映。這裡的現實與感性是相對而言、具有層次的。在同一公理系統內，數學的真理具有絕對性，而對於不同的公理系統，數學真理又具有相對性。這些思想對人的認識論、方法論、世界觀的形成都是非常有益的。

數學除了在人的智力發展方面的巨大影響外，對人的心靈淨化、良好的個性品質形成，乃至身心健康有重要促進作用。

肆、數學符號

對數學家而言，以下所列之符號或許常使用到，但對於一般學習者或許有些是不了解之處。故簡單列舉幾項並加以註明和舉例說明之：

符號	名稱 讀法 數學領域	定義	舉例
=	等號	$x=y$ 表示 x 和 y 是相同	$1+1=2$

	等於 所有領域	的東西或其值相等。	
≠	不等號 不等於 所有領域	$x \neq y$ 表示 x 和 y 不是相同的的東西或數值。	$1 \neq 2$
< >	嚴格不等號 小於，大於 序理論	$x< y$ 表示 x 小於 y。 $x> y$ 表示 x 大於 y。	$3<4$ $5>4$
≤ ≥	不等號 小於等於，大於等於 序理論	$x\leq y$ 表示 x 小於等於 y。 $x \geq y$ 表示 x 大於等於 y。	$3\leq4$；$5\leq5$ $5\geq4$；$5\geq5$
+	加號 加 算術	$4 + 6$ 表示 4 加 6。	$2 + 7 = 9$
−	減號 減 算術	$9 - 4$ 表示 9 減 4。	$8 - 3 = 5$
	負號 負 算術	-3 表示 3 的負數。	$-(-5) = 5$
	補集 減 集合論	$A-B$ 表示包含所有屬於 A 但不屬於 B 的元素的集合。	$\{1,2,4\}-\{1,3,4\}= \{2\}$
×	乘號 乘以 算術	3×4 表示 3 乘以 4。	$7 \times 8 = 56$
	直積 … 和…的直積 集合論	$X\times Y$ 表示所有第一個元素屬於 X，第二個元素屬於 Y 的有序對的集合。	$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

	叉乘 叉乘 向量代數	u × v 表示向量 u 和 v 的叉乘。	(1,2,5) × (3,4,−1) = (−22, 16, −2)
÷ /	除號 除以 算術	6 ÷ 3 或 6 / 3 表示 6 除以 3。	2 ÷ 4 = 0.5 12/4 = 3
√	根號 …的平方根 實數	$\sqrt{x}$ 表示其平方為 x 的正數。	$\sqrt{4}= 2$
√	復根號 …的平方根 複數	若用極坐標表示覆數 $z = r \exp(i\varphi)$（滿足 $-\pi < \varphi \le \pi$），則 $\sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$。	$\sqrt{(-1)}= i$
$\lvert\ \rvert$	絕對值 …的絕對值 數	$\lvert x\rvert$ 表示實數軸（或復平面）上 x 和 0 的距離。	$\lvert 3\rvert = 3, \lvert -5\rvert = \lvert 5\rvert$ $\lvert i\rvert = 1, \lvert 3+4i\rvert = 5$
!	階乘 …的階乘 組合論	$n!$ 表示連乘積 $1\times2\times\cdots\times n$。	4! = 1 × 2 × 3 × 4 = 24
~	機率分佈 滿足分佈 統計學	$X \sim D$ 表示隨機變數 X 機率分佈為 D。	$X \sim N(0,1)$：標準常態分佈
⇒ → ⊃	實質蘊涵 推出，若…則 … 命題邏輯	$A \Rightarrow B$ 表示 A 真則 B 也真；A 假則 B 不定。 → 可能和 ⇒ 一樣，或者有下面將提到的函數的意思。 ⊃ 可能和 ⇒ 一樣，或者有下面將提到的父集的意思。	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ 為真，但 $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 一般情況下為假（因為 x 可以是 −2）。
⇔	實質等價 若且唯若	$A \Leftrightarrow B$ 表示 A 真則 B 真，A 假則 B 假。	$x+ 5= y+2 \Leftrightarrow x+ 3= y$

↔	命題邏輯 非，不 命題邏輯		
∧	邏輯與或交運算 與 命題邏輯，格理論	若 A 為真且 B 為真，則命題 $A \wedge B$ 為真；否則為假。	$n < 4 \wedge n > 2 \Leftrightarrow n = 3$，當 n 是自然數
∨	邏輯或或並運算 或 命題邏輯，格理論 異或 命題邏輯，布爾代數	若 A 或 B（或都）為真，則命題 $A \vee B$ 為真；若兩者都假則命題為假。	$n \geq 4 \vee n \leq 2 \Leftrightarrow n \neq 3$，當 n 是自然數
∀	全稱量詞 對所有；對任意；對任一 謂詞邏輯	$\forall x$: $P(x)$ 表示 $P(x)$ 對於所有 x 為真。	$\forall n \in \mathrm{N}: n^2 \geq n$
∃	存在量詞 存在 謂詞邏輯	$\exists x$: $P(x)$ 表示存在至少一個 x 使得 $P(x)$ 為真。	$\exists n \in \mathrm{N}$: n 為偶數
∃!	唯一量詞 存在唯一 謂詞邏輯 定義為 所有領域	$\exists! x$: $P(x)$ 表示有且僅有一個 x 使得 $P(x)$ 為真。	$\exists! n \in \mathrm{N}: n + 5 = 2n$
{ , }	集合括弧 …的集合 集合論	$\{a,b,c\}$ 表示 a, b,c 組成的集合。	$\mathrm{N} = \{0,1,2,\cdots\}$
{: }	集合構造記	$\{x: P(x)\}$ 表示所有滿足	$\{n \in \mathrm{N}: n^2 < 20\} = \{0,1,2,3,4\}$

$\{\mid\}$	號 滿足…的集合 集合論	$P(x)$ 的 x 的集合。 $\{x\mid P(x)\}$ 和 $\{x: P(x)\}$ 的意義相同。	
$\varnothing$ $\{\}$	空集 空集 集合論	$\varnothing$ 表示沒有元素的集合。 $\{\}$ 的意義相同。	$\{n\in \mathrm{N}: 1< n^2< 4\}=\varnothing$
$\in$ $\notin$	集合屬於 屬於；不屬於 所有領域	$a\in S$ 表示 a 屬於集合 S；$a\notin S$ 表示 a 不屬於 S。	$(1/2)^{-1}\in \mathrm{N}$ $2^{-1}\notin \mathrm{N}$
$\subseteq$ $\subset$	子集 …的子集 集合論	$A\subseteq B$ 表示 A 的所有元素屬於 B。 $A\subset B$ 表示 $A\subseteq B$ 但 $A\neq B$。	$A\cap B\subseteq A$；$\mathrm{Q}\subset \mathrm{R}$
$\supseteq$ $\supset$	父集 …的父集 集合論	$A\supseteq B$ 表示 B 的所有元素屬於 A。 $A\supset B$ 表示 $A\supseteq B$ 但 $A\neq B$。	$A\cup B\supseteq B$；$\mathrm{R}\supset \mathrm{Q}$
$\cup$	並集 …和…的並集 集合論	$A\cup B$ 表示包含所有 A 和 B 的元素但不包含任何其他元素的集合。	$A\subseteq B\Leftrightarrow$ ；$A\cup B=B$
$\cap$	交集 …和…的交集 集合論	$A\cap B$ 表示包含所有同時屬於 A 和 B 的元素的集合。	$\{x\in \mathrm{R}: x^2=1\}\cap \mathrm{N}=\{1\}$
$\backslash$	補集 減；除去 集合論	$A\backslash B$ 表示所有屬於 A 但不屬於 B 的元素的集合。	$\{1,2,3,4\}\backslash\{3,4,5,6\}=\{1,2\}$
$(\ )$	函數應用 $f(x)$	$f(x)$ 表示 f 在 x 的值。	$f(x):=x^2$，則 $f(3)=3^2=9$。

	集合論		
	優先組合 所有領域	先執行括弧內的運算。	(8/4)/2= 2/2= 1；8/(4/2)= 8/2= 4
$f:X \to Y$	函數箭頭 從…到… 集合論 複合 集合論	$f:X\to Y$ 表示 f 從集合 X 映射到集合 Y。	設 $f:Z\to N$ 定義為 $f(x)= x^2$。
N ℕ	自然數 N 數	N 表示 {0,1,2,3,…}，另一定義參見自然數條目。	$\{\|a\|: a\in Z\}= N$
Z ℤ	整數 Z 數	Z 表示 {…,−3,−2,−1,0,1,2,3,…}。	$\{a: \|a\|\in N\}= Z$
Q ℚ	有理數 Q 數	Q 表示 $\{p/q: p,q\in Z, q\neq 0\}$。	$3.14\in Q$ $\pi\notin Q$
R ℝ	實數 R 數	R 表示 $\{\lim_{n\to\infty} a_n: \forall n\in N: a_n\in Q$, 極限存在$\}$。	$\pi\in R$ $\sqrt{(-1)}\notin R$
C ℂ	複數 C 數	C 表示 $\{a+bi: a,b\in R\}$。	$i=\sqrt{(-1)}\in C$
∞	無窮 無窮 數	∞ 是擴展的實數軸上大於任何實數的數；通常出現在極限中。	$\lim_{x\to 0} 1/\|x\|= \infty$
π	圓周率	π 表示圓周長和直徑之比。	$A= \pi r^2$ 是半徑為 r 的圓的

	pi 幾何 …的范數；…的長度 線性代數		面積
∑	求和 從…到…的和 算術	$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 表示 $a_1+a_2+\cdots+a_n$.	$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 1+4+9+16 = 30$
∏	求積 從…到…的積 算術	$\prod_{k=1}^{n} a_k$ 表示 $a_1 a_2 \cdots a_n$.	$\prod_{k=1}^{4} (k+2) = (1+2)(2+2)(3+2)(4+2) = 3\times 4\times 5\times 6 = 360$
∏	直積 …的直積 集合論 … 撇; …的導數 微積分	$\prod_{i=0}^{n} Y_i$ 表示所有 (n+1)-元組 $(y_0,\cdots,y_n)$。	$\prod_{n=1}^{3} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$
∫	不定幾分 或 反導數 …的不定積分; …的反導數 微積分	$\int f(x)dx$ 表示導數為 f 的函數.	$\int x^2 dx = x^3/3$
∫	定積分 從…到…以…為變數的積分 微積分 …的(del 或 nabla 或梯度)	$\int_a^b f(x)dx$ 表示 x-軸和 f 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之間的函數圖像所夾成的帶符號面積。	$\int_0^b x^2\ dx = b^3/3$;

	微積分		
∂	偏導數 …的偏導數 微積分	設有 $f(x_1, \cdots, x_n)$, $\partial f/\partial x_i$ 是 f 的對於 x_i 的當其他變數保持不變時的導數.	若 $f(x,y) = x^2y$, 則 $\partial f/\partial x = 2xy$
	邊界 …的邊界 拓撲	∂M 表示 M 的邊界	$\partial\{x: \lVert x\rVert \leq 2\} = \{x: \lVert x \rVert = 2\}$
$\perp$	垂直 垂直於 幾何	$x \perp y$ 表示 x 垂直於 y; 更一般的 x 正交於 y.	若 $l \perp m$ 和 $m \perp n$ 則 $l \parallel n$.
	底元素 底元素 格理論 蘊含； 模型論 從…導出 命題邏輯, 謂詞邏輯	$x = \perp$ 表示 x 是最小的元素.	$\forall x: x \wedge \perp = \perp$
$\triangleleft$	正則子群 是…的正則子群 群論 模 群論	$N \triangleleft G$ 表示 N 是 G 的正則子群.	$Z(G) \triangleleft G$
$\approx$	同構 同構於 群論	$G \approx H$ 表示 G 同構於 H	$Q / \{1, -1\} \approx V$, 其中 Q 是四元數群 V 是克萊因四群.

伍、結論

在人類文化的長河中，我們隨機取一個片段，都可以發現數學是其中的一個重要組成部份。

古希臘、東方中國至今保存下來的文化遺產中,有很大部分是藝術與數學。數學在文化保存與傳播中發揮著潛在作用，並直接或間接地的影響人的精神的改變。數學能幫助人們認識生活和世界，是人類從事普遍活動的有效工具，數學幫助並促進人類整個文化目標的實現。

因此，數學應視作社會文化的一個方面。從歷史角度考察，數學在不同的歷史發展時期，都扮演著重要的角色，發揮著重要作用。古希臘理性，導致希臘文化的興盛。古羅馬的專制，輕視數學，導致文化的衰落。文藝復興，也緣于恢復古希臘的理性，追根揭底仍與數學有不解之緣。

近代工業技術與數學的互相促進，新技術革命起源於計算技術改進，現代網路世界更是與數學息息相關。數學發展促進了技術發展，技術發展也刺激了數學發展，二者共同促進了人類文化的發展。這是因為，數學與技術的共同發展，使物質得以迅速增長，人們隨之而來的對世界與自然的認識，即思想方法發生變革。這些變革促進了藝術等更多領域的變化，因此文化本身向前發展了。

同時，我們也應看到，數學與文化發展有同步速度現象。

“數學還是一棵有生命力的樹，他隨著文明的興衰而榮枯”。當數學發展迅速時，正是人類文化發展最繁榮的時代。古希臘時期、文藝復興之後的科學時代等等，都是例證。當數學發展緩慢時，也正是科學技術、文化藝術發展最緩慢的時代。歐洲中世紀長達千年的桎梏，儘管把數學捧作上帝，但上帝並不領情，中國明清數學的僵化，科技文化同樣衰落。這其中是否是數學起主導作用，還有爭議，但數學與文化息息相通，處於整個文化群體之中，這一點是不可否認的。數學的生命力正是根植於養育她的文明的社

會之中。事實上，數學一直是文明和文化的重要部份。

陸、引用資料來源

1. 維基百科
2. 符號說明 http://eta.nkfust.edu.tw/course/math/mathsign.html
3. 為什麼要學習數學？【李善良、單墫】
4. 數學的故鄉【王懷權】