柯西不等式

作者：
謝宗昱老師。私立高英高級工商職業學校。

壹、前言

柯西（Cauchy, Augustin – Louis, 1789-1857）

法國數學家、力學家。1789年8月21日生於巴黎， 1857年5月23日卒於索鎮。1805年入巴黎綜合工科學校 學習，兩年後轉到橋樑工程學校，1809年成為工程師。 1813年放棄工程師的職業，從事理論科學研究。1816年 成為巴黎綜合工科學校教授，並當選為法國科學院院士。1830年，查理十世被逐，柯西拒絕效忠新的國王，因此失 去所有職務，並流亡國外。在此期間，曾任原國王查理十世的家庭教師。1848年恢復綜合工科學校教授職務， 並任巴黎大學教授。

貳、正文

柯西在大學期間，就開始研讀拉格朗日和拉普拉斯的著作。柯西最重的數學貢獻在微積分、複變函數和微 分方程等方面。他發現並闡明了級數收斂準則和一些判別法，提出關於極限論的 ε －方法，把整個極限過程用 不等式描述，後來經改進形成 ε － δ （ ε －N）方法沿用至今。他還給出了如今通用的函數連續性的概念，給 出定積分的第一個確切定義，以及廣義積分的定義等。在複變函數論方面，他系統地總結了複數理論，探討了 柯西－黎曼條件，建立了柯西積分定理和公式，還研究了留數定理。在微分方程方面，柯西深入考察了解的存 在唯一性定理等。

敘述

若 x 和 y 是實或複內積空間的元素，x 與 y 的內積記作 $\langle x,y\rangle$，那麼

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle 。$$

等式成立當且僅當 x 和 y 線性相關。

柯西—施瓦茨不等式的一個重要結果，是內積為連續函數，甚至是滿足 1 階利普希茨條件的函數。

柯西—施瓦茨不等式有另一形式，可以用範數的寫法表示：

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| 。$$

柯西—施瓦茨不等式的向量形式 $\vec{A}=(a_1,a_2), \vec{B}=(b_1,b_2)$：

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$$ ，等號成立於 $\vec{A}\|\vec{B}$。

柯西—施瓦茨不等式的一般形式

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2-a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

等號成立於$a_1b_2 = a_2b_1$

證明

- 實內積空間的情形：

注意到 $y = 0$ 時不等式顯然成立，所以可假設$\langle y, y\rangle$非零。對任意$\lambda \in \mathbb{R}$，可知

$$0 \le \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle$$
$$= \langle x-\lambda y, x\rangle - \lambda\langle x-\lambda y, y\rangle$$
$$= (\langle x,x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle) - \lambda(\langle x,y\rangle - \lambda\langle y,y\rangle)$$
$$= \|x\|^2 - \lambda\langle x,y\rangle - \lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2。$$

現在取值$\lambda = \langle x,y\rangle \cdot \|y\|^{-2}$，代入後得到

$$0 \le \|x\|^2 - \langle x,y\rangle^2 \cdot \|y\|^{-2}。$$

因此有

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|。$$

- 複內積空間的情形

證明類上。對任意$\lambda \in \mathbb{C}$，可知

$$0 \le \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle$$
$$= \langle x-\lambda y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x-\lambda y, y\rangle$$
$$= (\|x\|^2 - \lambda\overline{\langle x,y\rangle}) - \overline{\lambda}(\langle x,y\rangle - \lambda\|y\|^2)。$$

現在取值$\lambda = \langle x,y\rangle \cdot \|y\|^{-2}$，代入後得到

$$0 \le \|x\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 \cdot \|y\|^{-2},$$

因此有

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

證明到此告一段落, 下面將介紹一些柯西不等式的例子證明到此告一段落, 下面將介紹一些柯西不等式的例子.

例 1: 設$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 求$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})$之最小值?

答: 由柯西不等式得,

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})$$
$$=\left[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2+\cdots+(\sqrt{a_n})^2\right]\times\left[\frac{1}{(\sqrt{a_1})^2}+\frac{1}{(\sqrt{a_2})^2}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{a_n})^2}\right]$$
$$\ge(\sqrt{a_1}\times\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\times\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\sqrt{a_n}\times\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2 = n^2$$

等號成立$\Leftrightarrow a_1 : a_2 : \cdots : a_n = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \cdots : \frac{1}{a_n}$即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$

例2: 設 a,b 皆為正數,求 $(a+\frac{1}{b})(2b+\frac{1}{2a})$ 的最小值

答: 由柯西不等式得, $(a+\frac{1}{b})(2b+\frac{1}{2a}) \geq (\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\times\sqrt{2b})^2=(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=\frac{9}{2}$.

等號成立 $\Leftrightarrow \sqrt{a}:\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}:\sqrt{2b}$ **即** $ab=\frac{1}{2}$

參、結論

柯西對力學和天文學也有許多貢獻。著作甚豐，共出版了七部著作和 800 多篇論文，以《分析教程 》(1821) 和《關於定積分理論的報告》(1827) 最為著名。1882 年開始出版他的全集，至 1970 年已達 27 卷之 多。

參考文獻

一、台灣百科維基館。