

排列組合

作者：

劉宗豪老師。私立高英高級工商職業學校。

壹、前言

在日常生活中，我們時常聽到「排列組合」這個名詞的出現，究竟他是一個單詞？還是兩個呢？

其實，「排列」與「組合」是兩個觀念，縱使感覺意思很近，卻有著顯著的差異存在。比如說：甲乙丙三人坐三個位置，可以獲得甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲等六種坐法；但若題目改為甲乙丙三人為一組，則無論怎麼坐，此三人都是同一組。

聰明的你，看出端倪了嗎？沒錯，此二者有著“順序”上的差別，當順序併入考量時為「排列」，不考慮順序時則為「組合」。

貳、正文

一、計數規則

(一)加法原理

如果完成某件事的方法可區分成 n 個類別，而第 i 個類別有 x_i 種方法(其中 $i=1,2,3,\dots,n$)，且每個類別互不相干，那麼完成這件事的方法共有 $x_1+x_2+\dots+x_n$ 種。

(二)乘法原理

如果完成某件事情可依序分成 n 個步驟，而第 i 個步驟有 x_i 種方法可以完成它(其中 $i=1,2,3,\dots,n$)，那麼完成這件事的方法共有 $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ 種。

有了乘法原理後，我們來看以下例子：

假設某教室內有 n 張椅子，有 n 位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法？

解這個問題可分 n 個步驟

步驟一：第一位學生先從 n 張椅子任選一張，共有 n 種選法。

步驟二：第二位學生從剩下的 $n-1$ 張椅子任選一張，共有 $n-1$ 種選法。

步驟三：第三位學生從剩下的 $n-2$ 張椅子任選一張，共有 $n-2$ 種選法。

至步驟 $n-1$ ：第 $n-1$ 只能剩下的 2 張椅子任選一張，共有 2 種選法。

至步驟 n ：第 n 位學生只能選剩下的一張椅子，故只有 **1** 種選法。

由乘法原理知：共有 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ 種選法。

我們通常會將 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ 用 $n!$ 來表示。讀做 " n 階乘"。即

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots, n$ ，通常會將 $0!$ 定義為 1。

二、排列

排列大致分為直線排列、環狀排列與重複排列三種，以下我們一一介紹：

(一)直線排列

定義：從某些物件中取其一部份或全部，按照一定的順序排列。

1. 相異物排列

從 n 個不同的事物中，選取 m 個來排列，其中 $n \geq m$ 。用 P_m^n 來表示，

$$\text{即 } P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)。$$

另外，規定 $0! = 1$

2. 不盡相異物排列

設 n 個物件中有 k 種不同種類的事物，第一類有 n_1 個相同，第二類有 n_2 個相同， \dots ，第 k 類有 n_k 個相同，將此 n 個事物作直線排列，共有 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

種方法，我們常以符號 $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ 來表示。

舉前面我們所看到的三人坐三個位置的例子來看：

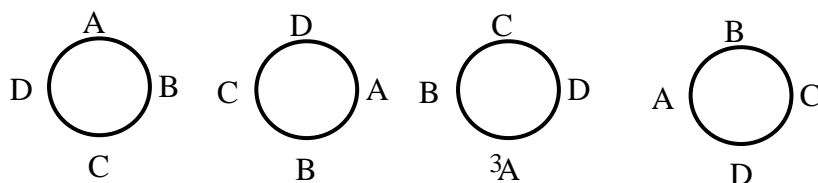
若甲乙丙改為甲乙乙，則原本〈甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲〉則變成〈甲乙乙、甲乙乙、乙甲乙、乙乙甲、乙甲乙、乙乙甲〉，明顯得只剩三種坐法。

(二)環狀排列

定義：自 n 個相異事物中，每次取 m 個沿圓周或封閉曲線排列，其排列數為 $\frac{P_m^n}{m}$ 。

例如：ABCD 四個人圍成一個圓圈，請問有幾種方法？

[解]：若將 ABCD 四人視為直線排列，共有 $4!$ 種方法，而就圍成一圈的觀點來看，



以上的四種排列 ABCD、DABC、CDAB、BCDA 均視為同一種排法，因此 ABCD 四個人圍成一個圓圈，共有 $\frac{4!}{4}$ 種方法。

(三)重複排列

定義：從 m 種不同之事物選取 n 個排成一列，但可以重複選取，這種排列稱為重複排列，排列方法有 m^n 個。

例如：有三封信要投入四個郵筒，將有幾種投遞方式？

[解]：

按照定義可得 4^3 種投法

三、組合

1. 全相異物不重複的組合

從 n 個不同物件中，取出 m 個不同物件的組合數為 $C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

例如：大樂透共有 49 個號碼，每取 6 個號碼稱為一組，全部共有多少種組合？

[解]： $C_6^{49} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$

2. 重複組合

從 n 類東西中取出 m 件，(每類至少有 m 件)的組合數為 $H_m^n = C_m^{n+m-1}$

3. 排列數與組合數的關係

$$P_r^n = C_r^n \times P_r^r \quad (r \leq n)$$

4. 組合的重要性質

$$(1) C_r^n = C_{n-r}^n \quad (r \leq n)$$

$$(2) \text{ 巴斯卡定理 } C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$$

5. 二項式定理

設 n 為任意正整數， xy 為任意數，則

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^{n-k} y^k$$

(1) 在 $(x+y)^n$ 的展開式中的所有二項式係數的和等於 2^n

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

(2) 在 $(x+y)^n$ 的展開式中的所有二項式係數，奇數項的和等於偶數項的和，即

$$C_0^n + C_2^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + \cdots = 2^{n-1}$$

參、結論

排列組合在生活上的應用頗多，可說是隨處可見。例如目前台灣最風行的「大樂透」，要算出所選號碼的組合數，只需將所選的號碼中，每 6 個當成一組來計算，即可算出能得多少組和需付多少錢。又譬如磁磚的紋路，要能夠讓外觀看起來優美，磁磚的排列就是一門學問了，而其使用到的原理就是排列。

或者說我們身上的服裝，設計師在設計衣服圖樣時，就能善用排列組合的觀念，用幾種類形圖案來讓衣服呈現了多樣化。棉被、床單、窗簾等，也都是利用的相同的概念來進行設計，以豐富了我們生活中的色彩。

而生活中另一個常見的主題--機率，其也廣泛使用了排列組合的觀念。因此，在高中高職這階段，一定需將排列組合學好，不僅用於課業升學，同時也是生活應用所能活用的。