

篇名：
尤拉數的應用

作者：
私立高英高級工商職業學校。李芳俞老師

壹●前言

在生活上如指數為無理數時的逼近值、星球的軌道問題都是以所謂的“自然對數的底(即尤拉數 e)”為底數來探討。而這個老師口中和 π 有一樣地位的無理數，究竟是如何發現的呢？它是被製造出來的？這引起了我們想了解此數的好奇心。於是我們透過「時時刻刻都在增長或衰退」的概念來推導出 e 的近似值，同時我們也思考著，除了細菌增長、放射線物質衰退與利率外，生活中還有甚麼常見的現象也有「時時刻刻在變化」的意涵呢？

貳●正文

李昂哈德·尤拉 (Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日—1783 年 9 月 18 日) 是一位瑞士數學家和物理學家，近代數學先驅之一，他在數學的多個領域，包括微積分和圖論都做出過重大發現。此外，他還在力學、光學和天文學等學科有突出的貢獻。

一、在數學上的應用

1. 最為著名的，是他引進了「函數」的概念，並且第一個將函數的寫為 $f(x)$ ，以表示一個以 x 為自變數的函數。他還介紹了三角函數現代符號，為自然對數的底（現在也稱為尤拉數已知），對求和希臘字母 Σ 和字母 i 字母 E 來表示虛數單位。尤拉將虛數的冪定義為如下公 $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ 這就是尤拉公式，它成為指數函數的中心。
2. 在數論里他引入了尤拉函數。自然數 n 的尤拉函數 $\phi(n)$ 被定義為小於 n 並且與 n 互質的自然數的個數。例如， $\phi(8) = 4$ ，因為有四個自然數 1, 3, 5 和 7 與 8 互質。
3. 他也定義了微分方程中的尤拉-馬歇羅尼常數，這一公式在計算難於計算的積分、求和與級數的時候極為有效：
$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$$
4. 尤拉還發現了公式的 $V - e + f = 2$ 的數量與頂點(Vertex, V)，邊(edge, e)和面(face, f)的凸多面體，因此，對一個平面圖形。此公式中的常數是現在被稱為尤拉示性數的圖形（或其他數學對象），是有關屬的對象。
5. 尤拉在 1736 年解決了柯尼斯堡七橋問題，並且發表了論文《關於位置幾何問題的解法》(Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis)，對一筆畫問題進行了闡述，是最早運用圖論和拓撲學的典範。

二、在物理學上的應用

1. 尤拉建立了彈性體的力矩定律：作用在彈性細長桿上的力矩正比於物質的彈性和通過質心軸和垂直於兩者的截面的轉動慣量。他還直接從牛頓運動定律出發，建立了流體力學裡的尤拉方程。這些方程組在形式上等價於粘度為 0 的納維-斯托克斯方程。人們對這些方程的主要興趣在於它們能被用來研究衝擊波。
2. 他對微分方程理論作出了重要貢獻。他還是尤拉近似法的創始人，這些計演算法被用於計算力學中。此中最有名的被稱為尤拉方法。

三、在音樂上的應用

在 1739 年，尤拉寫下了《音樂新理論的嘗試 (Tentamen novae theoriae musicae)》，書中試圖把數學和音樂結合起來。一位傳記作家寫道：這是一部「為精通數學的音樂家和精通音樂的數學家而寫的」著作。

四、在經濟學上的應用

1. 在經濟學方面，尤拉證明，如果產品的每個要素正好用於支付它自身的邊際產量，在固定規模報酬的情形下，總收入和產出將完全耗盡。
2. 計算複利當期數增加剛開始會變成 2 倍以上的利息。可是，當期數越來越大時，利息增加的趨勢慢慢變緩。而且會接近一個近似值，這個值差不多是 2.71828182845904523536.....，就是數學家尤拉(Euler)所引進的常數 e 。

參●結論

尤拉是 18 世紀數學界最傑出的人物之一，他不但為數學界作出貢獻，更把數學推至幾乎整個物理的領域。此外，他是數學史上最多產的數學家，寫了大量的力學、分析學、幾何學、變分法的課本，《無窮小分析引論》(1748)，《微分學原理》(1755)，以及《積分學原理》(1768-1770) 都成為數學中的經典著作。尤拉最大的功績是擴展了微積分的領域，為微分幾何及分析學的一些重要分支(如無窮級數、微分方程等)的產生與發展奠定了基礎。尤拉對數學的研究如此廣泛，在許多數學的分支中經常見到以他的名字命名的重要常數、公式和定理。(如尤拉數 e 、尤拉公式、尤拉線)。而 e 是一個很奇特的數字，它不是個有理數，而是個無理數，在數學裡面為五數之一，另外四個是大家都熟悉 0、1、 π 以及 i ， e 也常作為數學常數，亦是自然對數函數(Natural Logarithmic Functions)的底數。 e 也與複利計算、行星軌道有相關，更是微積分與高等數學的常客。

肆●引註資料

- 一、啟芳-公司會計 II (p.60)
- 二、昌爸工作坊-<http://www.mathland.idv.tw/>
- 三、台科大工職數學 C(第三章第一節)(P.134)
- 四、奇摩知識家