篇名：

探討圓周率

作者：
黃健雄老師。私立高英高級工商職業學校。

壹●前言

如以教授圓周率＝3.14159265為例，在這個課題下，不論中國及西方已有不少有趣數學內容圍繞着它；當中，如如中國數學家劉徽及祖沖之等及至英國鐘斯於1706年以「∏」符號表示圓周率的概念均使人們感到非常有趣。其中，更有數學家以中文及普通話的方式去記憶圓周率值。普通話用諧音記憶的有「山巔一寺一壺酒，爾樂苦煞吾，把酒吃，酒殺爾，殺不死，樂而樂」，就是3.14159265358979323846 26。更多關於∏的歷史內容可見數學資料庫-數學趣趣地-數學文章：圓周率p的歷史及圓周率- 维基百科，自由的百科全書的文章中。慶祝圓周率π的特別日子有兩天：圓周率日（Pi Day，又譯π節）和圓周率近似值日。

貳●正文

圓周率日

在圓周率日當天，滑鐵盧大學會以供應免費的餡餅當慶祝。3月14日是圓周率日的正式日從圓周率常用的近似值3.14而來。通常是在下午1時59分慶祝，以象徵圓周率的六位近似值3.14159。一些用24小時記時的人會改在凌晨1時59分或下午3時9分（15時9分）。全球各地的一些大學數學系在這天開派對慶祝。美國麻省理工學院首先倡議將3月14日（寓意3.14）定為國家圓周率日（National Pi Day）。2009年美國眾議院正式通過將每年的3月14號設定為「圓周率日」（Pi day）（HRES 224）[1][2]3月14日也是阿爾伯特・愛因斯坦的生日和卡爾・馬克思的忌日。這一天有不同的慶祝方式。一些圓周率會的人們會聚在一起思考圓周率在他們生活中的角色，和沒有了圓周率的世界會是怎樣。圓周率日慶祝者也會給予圓周率不同數值：吃圓周率，玩圓周率，喝圓周率；這裡圓周率（pi）等於餡餅（pie），彩罐遊戲（piñata），和一種雞尾酒（piña colada，椰子菠蘿汁）。「終極」圓周率日是1592年3月14日上午6時53分58秒。這時間以美國式記法是3/14/1592 6:53:58，對應了圓周率的十位近似值3.14159265358。圓周率近似值日參見：證明22/7大於π圓周率近似值日有兩天，7月22日（英國式日期記作 22/7，看成圓周率的近似分數）；或者4月26日，這天地球公轉了大約兩個天文單位距離，以地球公轉軌道長度除以這距離等於圓周率。從祖沖之求得的圓周率更近似分數 ，給出了慶祝圓周率的又一個日子，就是在一年的第355日下午1時13分（平年是12月21日圓周率，一般以π來表示，是一個在數學及物理學普遍存在的數學常數，是精確計算圓周長、圓面積、球體積等幾何量的關鍵值，其定義為圓的周長與直徑的比值。 也等於圓的面積與半徑平方的比值。在分析學裡， 可以嚴格定義為滿足 的最小正實數 ，這裡的 是正弦函數（採用分析學的定義）。發展歷史一塊產於公元前1900年的古巴比倫石匾清楚地記載了圓周率 = 25/8 = 3.125。同一時期的古埃及文物也表明圓周率等於分數16/9的平方，約等於3.16。埃及人似乎在更早的時候就知道圓周率了。 英國作家 John Taylor (1781 – 1864) 在其名著《金字塔》中指出，造於公元前2500年左右的金字塔和圓周率有關。例如，金字塔的周長和高度之比等於圓周率的兩倍，正好等於圓的周長和半徑之比。公元前800至600年成文的古印度宗教巨著《百道梵書》（Satapatha Brahmana）顯示了圓周率等於分數339/108, 約等於3.139。古希臘作為古代幾何王國對圓周率的貢獻尤為突出。古希臘大數學家阿基米德(公元前287 – 212 年) 開創了人類歷史上通過數學演算法計算圓周率近似值的先河。近似值常用π的十進位近似值為3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51，另外還有由祖沖之給出的約率： 及密率： [1]。• 一般教育使用的π值只取3.14或 ，超過3.14159265358979323846264338327 95

之後的位數就較少為人知了。・巴比倫人曾使用六十進制的圓周率，數值為.8,29,44,0,47,25,53,7,24,57,36,17,43,4,29,7,1,3,41,17,52,36,12,14,36,44,51,5,15,33,7,23,59,9,13,48,22,12,21,45,22,56,47,39,44,28,37,58,23,21,11,56,33,22,4,42,31,6,6,4。[2]

計算及發展由於π的無理性，所以只能以近似值的方法計算π。對於一般應用3.14或 已足夠，但工程學常利用3.1416（5位有效數字）或3.14159（6位有效數字）。至於密率（3.1415929...）則是一個易於記憶（三個連續奇數：113355），且精確至7位有效數字的分數近似值。而在2009年末，有科學家已經用超級電腦計算出圓周率暫時計到小數點後2兆7千億個小數位。而在2010年8月，日本男子近藤茂利用自己組裝硬盤容量達32TB的電腦，計算出圓周率小數點後5兆個小數位。[3]而在2011年10月19日，日本程序員JA0HXV宣布他已經將圓周率Pi計算到小數點後10兆位[4]實驗時期公元前17世紀的埃及古籍《阿美斯紙草書》（Ahmes，又稱「阿梅斯草片文書」；為英國人Alexander Henry Rhind（萊茵德）於1858年發現，因此還稱「萊茵德紙草書」 Rhind Papyrus）是世界上最早給出圓周率的超過十分位的近似值，為256/81（= 3 + 1/9 + 1/27 + 1/81)或3.160。這部紙草書聲稱是抄自300年前的另一部文獻，也就是說，這個Pi值是公元前1850年（1850 BC）就存在了。在阿基米德以前，π值的測定依靠實物測量。幾何法時期——反覆割圓阿基米德用正96邊形割圓術得出圓周率介於 與 之間。公元263年，中國數學家劉徽用「割圓術」計算圓周率，他先從圓內接正六邊形，逐次分割為12、24、48、96、192邊形。他說「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」（分割愈精細，誤差愈少。分割之後再分割，直到不能再分割為止，它就會與圓周完全重疊，就不會有誤差了），其中有求極限的思想。劉徽給出π=3.141024的圓周率近似值，並以 （徽率）為其分數近似值。劉徽在得圓周率=3.14之後，將這個數值和晉武庫中漢王莽時代製造的銅製體積度量衡標準嘉量斛的直徑和容積檢驗，發現3.14這個數值還是偏小[5]。於是繼續割圓到1536邊形，求出3072邊形的面積，得到令自己滿意的圓周率 [6]。中國古籍云：「徑一周三」[7]，意即取π=3 。公元466年，中國數學家祖沖之將圓周率算到小數點後6位的精確度，這一紀錄在世界上保持了一千年之久。同時，祖沖之給出了 （密率）這個很好的分數近似值，它是分母小於16604的分數中最接近π的[8]。（參見有理逼近）。為紀念祖沖之對圓周率發展的貢獻，日本數學家三上義夫將這一推算值命名為「祖沖之圓周率」，簡稱「祖率」。在祖沖之後的印度數學家阿耶波多獲得 62832/20000 = 3.1416；分子、分母都比祖沖之的密率大，結果卻不如密率準確。可惜祖沖之的著作《綴術》已經亡佚，後人無從得知祖沖之如何估算圓周率的值。錢大昕的《十駕齋養新錄》卷第十七首條〈圓徑周率〉引《隋書律曆志》：「古之九數，圓周率三圓徑率一，其術疏舛，自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密率，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三（刻本作二，誤）丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間，密率圓徑一百一十三，圓週三百五十五，約率圓徑七，周二十二。又設開差冪、開差立，兼以正圓參之，指要精密，算氏之最者也。」分析法時期——這一時期人們開始擺脫利用割圓術的繁複計算，開始利用無窮級數或無窮連乘積求π。魯道夫・范・科伊倫（約1600年）計算出π的小數點後首35位。他對此感到自豪，因而命人把它刻在自己的墓碑上。斯洛維尼亞數學家Jurij Vega於1789年得出π的小數點後首140位，其中只有137位是正確的。這個世界紀錄維持了五十年。他利用了John Machin於1706年提出的數式。所有以上的方法都不能快速算出π。第一個快速演算法由數學家梅欽在1706年提出： 其中arctan(x)可由泰勒級數算出。類似方法稱為「梅欽類公式」。電腦時代上萬位以上的小數位值通常利用高斯-勒讓德演算法或波溫演算法；另外以往亦曾使用於1976年發現的薩拉明-布倫特演算法。第一個π和1/π的小數點後首一百萬位利用了古騰堡計劃。最新紀錄是2002年9月得出的1,241,100,000,000個小數位，由擁有1TB主記憶體的64-node日立超級電腦，以每秒200億運算速度得出，比舊紀錄多算出一倍（206億小數位）。此紀錄由以下梅欽類公式得出： (K. Takano, 1982年) (F. C. W. Störmer, 1896年)實際上生活中我們也用不到這麼多位數，但這有助於超級電腦的測試。1996年，David H. Bailey、Peter Borwein及西蒙・普勞夫發現了π的其中一個無窮級

數： 以上述公式可以計算π的第n個二進位或十六進位小數，而不需先計算首n-1個小數位。此類π演算法稱為貝利－波爾溫－普勞夫公式。請參考Bailey's website 上相關程式。法布里斯・貝拉於1997年給出了計算機效率上高出上式47%的BBP演算法： 請參考Fabrice Bellard's PI page 。其他計算圓周率的公式包括： (拉馬努金Ramanujan) (David Chudnovsky及Gregory Chudnovsky) [2]編寫電腦程式時，也可以利用反三角函數直接定義 值，但是編譯器必須具備三角函數的函式庫：利用正弦函數 利用餘弦函數 電腦代數系統多種電腦代數系統軟體都可以計算高精度圓周率。例如 Mapleevalf(Pi,100000)在Intel Core i7處理器電腦上20秒內算出一百萬位圓周率數值。年表2011年IBM 藍色基因/P超級電腦[11]算出π2的60,000,000,000,000位二進制小數。特性和相關公式幾何若圓的半徑為r，則其周長為C = 2πr若圓的半徑為r，則其面積為S =πr2若橢圓的長、短兩軸分別為a 和 b ，則其面積為S = πab若球體的半徑為 r，則其體積為 V = (4/3)πr3若球體的半徑為r，則其表面積為 S = 4πr2角：180度相等於π弧度環面的體積和表面積公式 R是管子的中心到環面的中心的距離， r是圓管的半徑。代數π是個無理數，即不可表達成兩個整數之比，是由Johann Heinrich Lambert於1761年證明的。 1882年，Ferdinand Lindemann更證明了π是超越數，即不可能是任何有理數多項式的根。圓周率的超越性否定了化圓為方這古老尺規作圖問題的可能性，因所有尺規作圖只能得出代數數，而超越數不是代數數。數學分析 (Leibniz定理) (Wallis乘積) (由歐拉證明，參見巴塞爾問題) (斯特林公式) (歐拉公式)π有個特別的連分數表示式： π本身的連分數表示式(簡寫)為[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,...]，其近似部分給出的首三個漸近分數 數論第一個和第三個漸近分數即為約率和密率的值。數學上可以證明，這樣得到的漸近分數，在分子或分母小於下一個漸進分數的分數中，其值是最接近精確值的近似值。(另有12個表達式見於[3])兩個任意自然數是互質的機率是 。任取一個任意整數，該整數沒有重複質因數的機率為 。一個任意整數平均可用 個方法寫成兩個完全平方數之和。機率論取一枚長度為l的針，再取一張白紙在上面畫上一些距離為2l的平行線。把針從一定高度釋放，讓其自由落體到紙面上。針與平行線相交的機率是圓周率的倒數（泊松針）。曾經有人以此方法來尋找π的值。動態系統／遍歷理論 對[0, 1]中幾乎所有x0，其中 xi是對於r=4的邏輯圖像迭代數列。物理學 (海森堡不確定性原理) (相對論的場方程)統計學 （此為常態分配的機率密度函數）高精度π的應用一般工程或天文運算不需要成千上萬位精確度的π，因為40位精確度的π已經足以計算誤差小於一個質子大小的銀河系圓周。現今精度高π應用於電腦軟硬體的測試，以不同的演算法計算π而結果誤差大代表電腦系統可能出問題。[12] [13]尚待解決的問題關於π未解決的問題包括：• 它是否是一個正規數，即π的十進位運算式是否包含所有的有限數列。對於二進位運算式，在2000年Bailey及Crandall藉助貝利-波爾溫-普勞夫公式，證明了π的2-正規性可以由一個有關混沌理論的合理但尚未證明的猜想導出。[14] [15]• 0, ..., 9 是否以完全隨機的形態出現在π的十進位運算式中。若然，則對於非十進位運算式，亦應有類似特質。• 究竟是否所有 0, ..., 9 都會無窮地在π的小數運算式中出現。• 到底超級電腦計算出來的上億位的圓周率是否正確[來源請求]。

參●結論

批評近年來，有部分學者認為約等於3.14的π「不合自然」，應該用雙倍於π、約等於6.28的一個常數代替。支持這一說法的學者認為在很多數學公式2π很常見，很少單獨使用一個π。美國哈佛大學物理學教授的麥可・哈特爾稱「圓形與直徑無關，而與半徑相關，圓形由離中心一定距離即半徑的一系列點構成」。並建議使用希臘字母τ來代替π[16][17][18]。美國數學家鮑勃・帕萊（Bob Palais）於2001年在《數學情報》（The Mathematical Intelligencer）上發表了一篇題為《π 是錯誤的！》（π Is Wrong!）的論文。在論文的第一段，鮑勃・帕萊說道：幾個世紀以來，π 受到了無限的推崇和讚賞。數學家們歌頌 π 的偉大與神秘，把它當作數學界的象徵；計算器和程式語言里也少不了 π 的身影；甚至有 一部電影 就直接以它命名⋯⋯但是，π 其實只是一個冒牌貨，真正值得大家敬畏和讚賞的，其實應該是一個不幸

被我們稱作 2π 的數。美國數學家麥克・哈特爾（Michael Hartl） 建立了網站 tauday.com ，呼籲人們用希臘字母 τ（發音：tau）來表示「正確的」圓周率 C/r。並建議大家以後在寫論文時，用一句「為方便起見，定義 $\tau = 2\pi$ 」開頭。著名的 Geek 漫畫網站 spikedmath.com 建立了 thepimanifesto.com ，裡邊有一篇洋洋灑灑數千字的 π 宣言，宣稱圓周率定義為周長與直徑之比有優越性，並認為在衡量圓柱形物體的截面大小時，直徑比半徑更方便測量，想要反駁擁護 τ 的言論。

肆●引註資料

維基百科-圓周率