

篇名：

數學與音樂的對話

作者：

私立高英高級工商職業學校。林羿姍老師

壹●前言

數學是推理中的音樂，而音樂則是感覺中的數學。代表理性的數學，其規律、和諧與秩序所產生的美感，雖無聲音之傳遞，但與音樂是根本相通的；而代表感性的音樂，其音強、音高、音色、節奏、旋律、曲式及風格，雖無明顯之數字表達，但數學的蹤影卻處處可見。在音樂的領域中，運用數學來處理相關問題的範例很多，本文乃運用數學的各種運算，探討其在莫札特樂曲結構分析的應用，包括敘述音樂領域中數學的應用範例；莫札特的音樂效應；探討莫札特樂曲結構之黃金比例的應用，而呈現了完美的數學比例關係。

有人說數學是科學交響曲中最後一個音符，缺少這一個音符，科學交響曲就沒有真正結束。其實，音樂與數學，也有著非常密切的關係。

學者匡釗認為：西方音樂，在其發生之初便與數學有著不容忽視的血緣關係。畢達哥拉斯認為“數”是世界萬物的本源、根基。即使現有的音階序列——五度音程或八度音程——也更多是出於推理而不完全是人耳分辨的純粹“自然”的結果。而這吟唱個別旋律還沒問題。但鍵盤樂器每個音之間的音差，不是人耳自然分辨的結果，而是一種數學計算和推理。

追溯到公元前六世紀，當時畢達哥拉斯學派用比率將數學與音樂聯繫起來。他們不僅認識到所撥琴弦產生的聲音與琴弦的長度有著密切的關係，從而發現了和聲與整數之間的關係，而且還發現諧聲是由長度成整數比的同樣繃緊的弦發出的。

巴赫的 48 首十二平均律鋼琴曲，實際上是數學計算得出的數據所顯示的聲音和諧，音樂的和諧與美感體現的是數字的和諧與美感。十二平均律的計算成果並不是西方人的發明，我國明代學者朱載堉早在 16 世紀就已經完成十二平均律的理論和計算，這在當時處於世界領先水平。

在音樂理論、音樂作曲、音樂合成、電子音樂製作等等方面，都需要數學，歸納和分析音程和音調的數學二元圖表，在在都顯示出數學與音樂密不可分的關係。期望藉由數學與音樂的多元對話，探討音樂中的數學關係，以提供促進科技與人文藝術之融合的另一種思考的模式。

大自然運行的規律告訴我們，一個物體以頻率 v 震動時，也會同時以頻率 $2v, 3v, \dots$ 震動。因此若此物體震動發出了頻率為 v 的音高，它也同時發出頻率為 $2v, 3v, \dots$ 的音高。這些音叫做泛音。在音樂上，從 v 發出的音高到 $2v$ 發出的音高稱為一個八度（聽起來就是低音 Do 到高音 Do 的感覺）。從 $2v$ 發出的音高到 $3v$ 發出的音高稱為一個完全五度（聽起來就是 Do 到 Sol 的感覺）。泛音聽得到嗎？可以。古典吉他的演奏中就有‘泛音’的技巧。比如，輕觸弦的第十二格位置，然後撥弦的同時把手指放開，則會聽到高八度的泛音。我們聽聽吉他的泛音。為什麼？因為古典吉他第十二格的位置剛好是弦的一半長，撥弦的同時把手指放開，相當於用手指抵銷頻率 v 的震動，凸顯頻率為 $2v$ 的震動，這就是第一泛音。人也是震動聲帶才能發出聲音。所以，理論上人的聲音也有泛音。有沒有

可能唱出泛音,或是同時唱兩個音? 可以。西伯利亞的圖瓦族(Tuva) 有一種稱為“泛音唱法”(overtone singing)的傳統歌唱方式,可以同時唱出兩個音。即使發出相同的音高,我們仍然能分辨不同樂器的音色(timbre),因為音色就是不同泛音疊合之後的結果—也許長笛的第四泛音比單簧管的第四泛音大,諸如此類。

貳●正文

(一)畢達哥拉斯的音階

傳說中畢達哥拉斯(Pythagoras (579-520 B.C.)) 路過一家鐵匠店發現四個鐵匠打鐵的聲音異常悅耳而開始研究聲音。

古希臘著名的畢達哥拉斯學派其信條是「萬物皆數也」。他們發現了兩件事實,觸發了用數學來整理音樂之念: 1.彈撥繃緊的弦所發出的聲音,其音高取決於弦的長度。2.當彈撥長短不等的弦,其長度成「簡單」整數比時(請注意,對他們來說任兩線長都會成整數比)就會產生諧音。因此畢達哥拉斯學派把音樂聯結為數和數之的簡單關係。前一項是各音階產生的原理,這個簡單實驗可由吉他的琴格上看出來。例如彈撥吉他一弦和其半長的弦,音高恰好差八度;而一弦長所發出的音高如果為C(即Do),則其 $3/4$ 長所發出的音為F(即Fa),其 $2/3$ 長所發出的音為G(即So)。

The image shows a musical score for guitar, consisting of four staves. The first staff is marked 'Andante' and 'p', with a 'V' breath mark above the first measure and 'semplice' below. The second staff is marked 'ritard.' and 'Allegro moderato', with 'pp' and 'ppp' dynamics, a 'V' breath mark, and 'mf molto cantabile' below. The third staff is marked 'Andante' and 'p'. The fourth staff is marked 'riten.' and 'ppp', with 'pizz.' above and '8' above the first measure. The score includes various musical notations such as notes, rests, and fingerings.

後一項是和聲學的基礎,當部份長度成簡單整數比的弦同時發出聲音時(此指的是同材料、同緊度的弦),就會產生諧音,我們稱做和弦(chord)。一條旋律線配上和弦之後使得音樂的構造更充實且富有變化,便產生了「和聲」(harmonic)的觀念,而「和弦」及「和聲學」可以說是西方音樂發展的命脈,音樂成了「萬物皆數」的最佳實例。另一方面,數學也解釋了部分音樂的現象。例如將兩個三度音程接在一起所產生的和弦稱做「三和弦」,若三和弦是一個大三度接一個小三度,就叫做『大三和弦』(如1-3-5);相反的,小三度接大三度,就叫做『小三和弦』(如6-1-3),但如

將這兩個和弦做一對比，則『大三和弦』聽起來更為和諧。那是因為『大三和弦』的比為4：5：6，較『小三和弦』的比10：12：15更接近『簡單』整數比。

該學派也把行星運動聯結為數與數的關係。他們相信物體在空間運動時會發出聲音。物體運動的越快所發出的聲音也越高（管樂即是利用空氣運動，以發出不同音高的聲音）。根據他們的天文學，離地球越遠的行星運行越快，發出的聲音也越高，而且都配成了諧音，此即所謂的『天體音樂』，可以猜想在他們心中，行星的運行速度及距離的遠近也存在一個美妙的關係，宇宙天體的模型理論必然遵循數學的原則。故算術(純粹數)、幾何(固定數)、與音樂(應用數)、天文(運動數)聯結在一起，併稱為希臘的四學科。甚至到中世紀，這「四學科」仍被包括在學校課程中。

克卜勒 (Kepler, 1571-1630) 承接了這個理論，在他了著作 *Harmonices Mundi* (*Harmonies of the World*, 1619) 裡，企圖找出這些星球成和諧比例的關係，在試過了體積，質量、速度，週期及公轉半徑...後，最後終於得到答案。土星的遠日點和近日點比為4：5，是一個大三度；火星的為2：3，是完全五度。木星的遠日點與土星的近日點恰為1：2（八度），他甚至發現，若將這些行星關係給一個共同調性，由土星的遠日點開始算起恰為一個大調音階，近日點算起則為小調音階。克卜勒的這個發現與他不朽的三大定律息息相關。

	I	II	III	IV	V	VI	VII	I
音 階	C	D	E	F	G	A	B	C
大二度	8	:	9					
小七度		9			:			16
大三度	4	:	5					
小六度			5		:			8
完全四度	3	:		4				
完全五度				2	:			3
完全五度	2	:						
完全四度					3	:		4
大六度	3	:						
小三度						5	:	6
大七度	8	:						
小二度							15	: 16
八度音階	1	:						

畢達哥拉斯這個希臘哲學家兼數學家用數學方法研究音階的定義法則，找出了音樂史上影響深遠的「五度相生律」；柏拉圖的老師阿基塔斯 (Archytas, 400-365 B.C.) 在音程方面一些理論上的創見創造了「純律大三度」的音程；數學家伊拉托斯瑞那斯 (Eratosthenes 276-195 B.C.) 發現了「純律小三度」音程（順道一提，此人利用了一根竹竿及一口井算出了地球圓周，與近代測量的數目誤差僅100公里）；天文學兼數學家

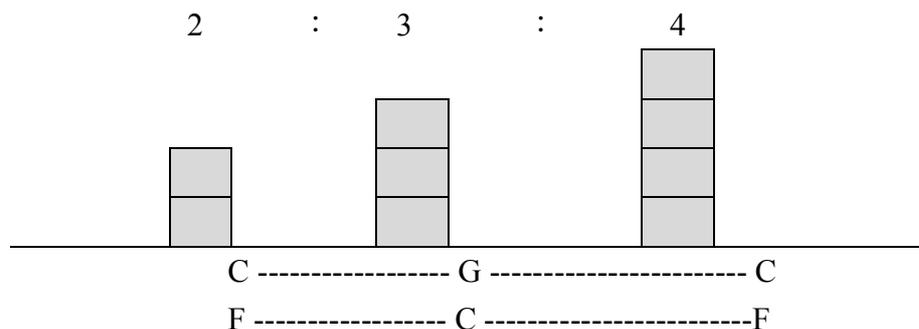
托勒密 (Ptolemy ? -168) 構造了一種純律的「四音列」。畢氏學派成員之一尼克馬庫斯 (Nichomachus 大約紀元後100年) 把各種比分類並加以命名, 認為研究比例對自然科學和音樂非常重要, 並且稱 $a : (a + b) / 2 = 2ab / (a + b) : b$ 為「音樂比例」。(請不要將這個比例想得太複雜, 仔細觀察內項便能發覺妙處, 代入 $a=1, b=2$ 就更能體會為此稱呼的精神。)

尋找幾何平均數對音階的確定有著絕對的影響, 阿基塔斯利用兩個數之間的兩個比例中項去解決『倍積』問題, 相同的它被用在音階的找尋上, 有機會我們將更深入的探討。而『音樂比例』在音樂理論中就是試圖確定八度音階, 尋找 1 和 2 之間的幾何平均數, 有人認為這是導致無理數發現的因素之一。

十八世紀起, 歐洲進入了十二平均律時期, 所謂十二平均律就是把一組八度音, 按頻率等比分為12個『半音』, 後一音頻率為前一音的 $12\sqrt{2} = 1.05946$ 倍 (又是幾何平均數), 由 $A = 440.00$ 赫茲開始, 例如上一個半音升 $A = 440 \times 1.05946 = 466.1624$ 赫茲, 以此類推。它的優點之一就是易於轉調 (你可以由任一音當Do開始音階), 這除了用數學方法解釋外別無他法, 因為每個音之間都前後公比都一樣, 而十二平均律對音樂的影響, 尤其是近代的鍵盤樂器, 更是無法估量。

之後, 法國音樂理論家拉莫 (P.Rameau 1683-1764) 深受笛卡兒 (R.Descartes) 的影響以物理學作為和聲理論, 完成了【和聲論】, 奠定了近世和聲學基礎。振動弦 (vibrating string) 所引發的問題更帶來數學界無限的活力, 如偏微分方程、富立葉級數、集合導論, 不少 18 世紀的數學家因而致力於常微分方程和偏微分方程等新興學科的研究。泰勒 (B.Taylor 1685-1731) 在確定振動弦的形狀問題時, 首先引進二階常微分方程, 導出了一根伸張的振動弦的基頻。丹尼爾·伯努利 (D.Bernouli, 1700-1782) 和他父親約翰·伯努利 (J.Bernouli, 1667-1748) 都曾為音樂理論做過工作。但在弦振動的諧音或高階模式方面丹尼爾超過了泰勒和他父親, 對顫弦上較高泛音及和聲有更深一層的認識。尤拉 (Euler 1707-1783) 也做過這方面的研究, 得到與丹尼爾很相似的結果。

至於在中國這邊, 古籍中記載律學理論, 以【管子·地員篇】為最早, 該書相傳為管仲所作。書中把五音的精密作了完全合乎科學的論斷, 即從數學的角度提出了「三分損益」律。把一個振動體 (如琴弦) 在長度上三等分, 捨其一形成三分之二, 稱為「三分損一」; 加其一形成四分之三, 稱為「三分益一」, 如此繼續相生而成各律。這種方法分別得到 2 : 3 與 3 : 4 的振動體, 形成了純五度和純四度的音程, 這與畢達哥拉斯所創的五度相生律完全相同。



繼管仲後，【呂氏春秋·音律】把三分損益法由五律推廣到十二律，使音樂調式的範圍擴大，可在十二律上進行「旋宮轉調」，也可看出儘管在不同地區，這種純粹的知識是有其共通性的。而由各音為主音所構築出來的音階對旋律的外形與情緒有極大的影響（因為比例有了調整），將之分為宮、商、角、徵、羽五種調性，每一種調性都被賦予一種心情的代言。受陰陽五行之說的影響，五聲「宮、商、角、徵、羽」與「金、木、水、火、土」及方位被聯繫起來。十二律按陰陽分為陽六律和陰六律，和十二地支，星象十二宮、十二月分也相聯繫，產生了許多與命理有關的論點。

（二）純律音階

在畢氏音階中，E、A、B 三個音對音C 的頻率比值分別是 $27/16$ 、 $81/64$ 和 $243/128$ ，並沒有呈現如同其他音非常簡單的整數比；因此，天文學家兼數學家拖勒密 (Ptolemy) 利用和弦的升降，將E、A、B 之比值分別修正為 $5/4$ 、 $5/3$ 、 $15/8$ ，而得到之純律音階（蔡聰明，1994）。

（三）十二平均律音階

所謂十二平均律，即將1 個完全八度音程按數學等比數列劃分為12 個部分，每1 個部分即為1 個半音，每2 個半音則構成1 個全音；而每1 個半音之振動頻率為前1 個半音之 $2^{1/12}$ 倍。我們稱之“十二平均律”、“十二等比律”，或簡稱“平均律”，其所得之音階則稱為十二平均律音階。

參●結論

威斯特(J. Sylvester, 1814-1897) 宣稱：“數學是理性的音樂，音樂是感性的數學，兩者的靈魂是完全一致的！…… 當人類智慧昇華到完美境界時，音樂和數學就互相滲透而融為一體了。

著名哲學家、數學家萊布尼茨也曾指出：“音樂—— 這是心靈的歡樂，而心靈不知不覺地進行著計算。” 事實上，自古以來，音樂和數學就有關聯。中國古代的“三分損益法” 與“十二平均律” 就是採用數學運算研究樂律的方法。古希臘的畢達哥拉斯(Pythagoras, 公元前572-前500) 學派發現產生各種諧音的弦的長度都是成整數比的，樂聲的協調與所認識的整數之間有著密切的關係，撥動一根弦發出的聲音依賴於弦的長度。事實上，被撥動弦的每一種和諧的結合，都能表示為整數比。由增大成整數比的弦的長度，能夠產生全部的音階。例如，當兩根繃得一樣緊的弦的長度的比是 $2:1$ 時，就會發出相差八度的諧音；而如果兩條弦的長度的比是 $3:2$ 時，就會發出另一種諧音；短弦發出的音比長弦發出的音高五度；等等。事實上，從一根產生音C 的弦開始，就可接著C 的長度的 $16/15$ 給出B，C 的長度的 $6/5$ 給出A，C 的 $4/3$ 給出G，C 的 $3/2$ 給出F，C 的 $8/5$ 給出E，C 的 $16/9$ 給出D，C 的 $2/1$ 給出低音C。後來人們把音樂和算術、幾何和天文學同列為教育的課程。就連今天的電子電腦也始終跟音樂聯繫在一起。

這裡進一步指出的是，當畢達哥拉斯作出他的第一個偉大發現—— 當他發現音調的高低依賴於震動弦的長度時，對哲學和數學思想的未來方向具有決定意義的並不是這種事實本身，而是對這種事實的解釋。畢達哥拉斯不可能把這種發現看成是一種孤立的現象。最深奧的神秘之一—— 美的神祕，似乎在這裡被揭示出來了。對希臘精

神來說，美始終具有一種完全客觀的意義。美就是真，它是實在的一種基本品格。如果我們在音調的和諧中發現的美被還原為一種簡單的數的比例的話，那麼正是數向我們揭示宇宙秩序的基本結構。畢達哥拉斯學派有一句原話：“數是人類思想的嚮導和主人，沒有它的力量，萬物就都處於昏暗混亂之中。”我們並不是生活在真理的世界中，而是生活在蒙蔽和錯覺的世界中，在數中，而且只有在數中，我們才發現了一個可理解的宇宙。樂譜的書寫是數學在音樂上顯示其影響的最為明顯的地方。在樂曲的稿中，我們可以找到拍號(4:4, 3:4 或1:4 等)、每個小節的拍子、全音符、二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符等等，音樂方程就是一個最好的詮釋。譜寫樂曲要使它適合於每音節的拍子數，這相似於找公分母的過程——在一個固定的拍子裡，不同長度的音符必須使它湊成一個特定的節拍。

然而作曲家創造樂曲時卻能極其美妙而又毫不費力地把它們與樂譜的嚴格構造有機地融合在一起。對一部完整的作品進行分析，我們會看到每一個音節都有規定的拍數，而且運用了各種合適長度的音符。

為什麼平臺鋼琴有它特有的形狀？實際上，許多樂器的形狀和結構都跟不同的數學概念聯繫著。指數函數和它的曲線就是這樣概念中的一種。一條指數曲線由形如 $y = kx$ 的方程所描述，這裡 $k > 0$ 。例如 $y = 2x$ ，音樂的器械，無論是弦樂還是管樂，在它們的結構中都反映出指數曲線的形狀。對樂聲本質的研究，在19世紀法國數學家傅立葉(J. B. Fourier, 1768-1830) 的著作中達到了頂峰。他證明了所有的樂聲——不管是器樂還是聲樂——都能用數學運算式來描述，它們是一些簡單的正弦周期函數的和。每種聲音都有三種品質：音調、音量和音色，並以此與其他的樂聲相區別。傅立葉的發現，使人們可以將聲音的三種品質通過圖解加以描述並區分。音調與曲線的頻率有關，音量與曲線的振幅有關，而音色則與周期的形狀有關。這樣就使人們對音頻、音高把握得更加清楚了，從而為創作各種優美的音樂提供了可能。

數學的發現，即周期函數，是現代樂器設計和電腦音響設計的精髓。許多樂器的製造都是把它們產生聲音的圖像，與這些樂器理想聲音的圖像相比較然後加以改進的。電子音樂的忠實再生也是跟周期圖像緊密聯繫著的。音樂家和數學家們將在音樂的產生和再生方面，繼續擔任著同等重要的角色。

肆●引註資料

一、[http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/95\(286-295\)/288-pdf/01.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/95(286-295)/288-pdf/01.pdf)

數學與音樂的對話—探討音樂中的數學應用 翁瑞霖

二、http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d331/33102.pdf

從鋼琴調音談數學與音樂 游森棚

三、<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol2no8b.htm>

音樂中的數學 謝佳叡

四、http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d283/28306.pdf

論數學與藝術的關聯 張維忠

參考書目：

1. 什麼都是數學，李武炎，台灣商務印書館股份有限公司
2. Morris Kline, 數學史---數學思想的發展 (上) (中)，林炎全等譯，九章出版社