篇名：

探討畢氏定理在生活上的應用

作者：

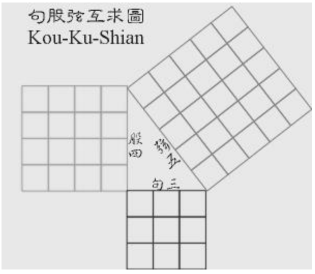
私立高英高級工商職業學校。李芳俞老師

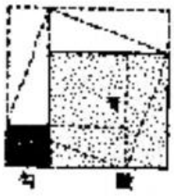
壹●前言

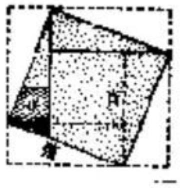
畢氏定理在三個不同的國家有不同的解法，在古中國是用「勾股弦定理」，再同一個國家也有不同的證明方法就像三國的劉徽和吳國的趙爽，在古巴比倫也有自己的一套法則，最後則是一位法國數學家皮埃爾.德.費爾瑪(Pierre de Fermat，1601-1665）提出「費爾瑪最後定理」（Puerre’ s Last Theorem），每個證明方法都有不同的獨特性。數學解題本來就是多樣性且趣味性，希望藉由課本的圖解方法，探索更多有趣的的數學原理，以及另類的解法，尤其當我們面對幾何測量問題時，有更輕鬆好用的工具以供使用。

貳●正文

一、畢氏定理起源-東方

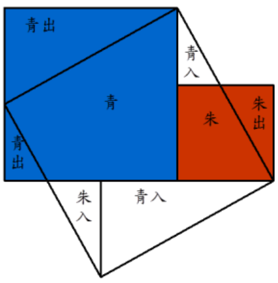






在中國，它被稱為「勾股定理」或「商高定理」。之所以稱為「勾股定理」，是因為中國數學家把直角三角形稱為勾股形。「勾股弦」這三個字是從直角三角三個邊的名字而來：「勾」是較短的股；「股」是較長的股；而「弦」指的是斜邊。中國的勾股法是被用來發現天文和測量地理。古代中國最重要的數學經典《九章算術》中就專闢〈勾股章〉，其內容有勾股定理、解勾股形（知道其中兩邊的條件求解第三邊）、勾股容方、勾股容圓、測望問題等。不過，整章最核心的部分就是勾股定理。

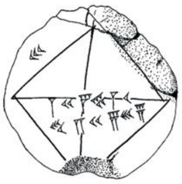
三國時期的劉徽註解《九章算術》時，也給了證明劉輝利用一個已知兩股為3，4的直角三角形，欲求其斜邊長的題目為引導，進而一般化且證明了勾股弦定理。劉徽注文：「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不動也，合成弦方之冪。」，他是用以盈補虛的方法，用不同的顏色來標記有關的圖形。



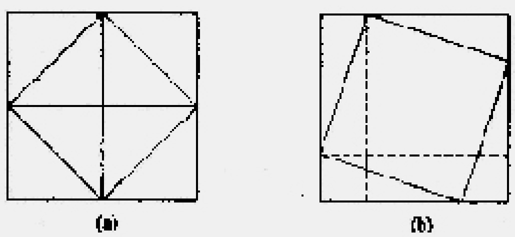
於被叫作「商高定理」，則是因為出現在被認為是最早成書的算經《周髀算經》的篇首，藉著周公與商高兩人的對話，給出了「勾廣三，股修四，徑隅五」，滿足畢氏定理的三數組（也就是勾3，股4，弦5）。同時，據史家的研究，兩人的對話中也交代了這定理的證明。

二、畢氏定理起源-西方

「畢氏定理」是因古希臘的畢達哥拉斯（Pythagoras）證明它而得名。據說，畢達哥拉斯證明了這一定理後欣喜若狂，便叫他的門人宰了一百頭牛大肆慶祝。因此，這個定理也被暱稱為「百牛定理」。但在畢氏之前，已有「間接」的證據顯示這定理可能早已為人所知。比如，現收藏於耶魯大學的一塊編號「YBC 7289」巴比倫石版，看來就是一個立起來的正方形，在其邊上有個數字30，而橫的對角線上則有兩組數據1；24，51，10和42；25，35（其中分號前的數目代表整數）。



因此說巴比倫人知道了畢氏定理，應不為過。人們對於畢氏定理的巴比倫證法(被稱為「兩倍正方形」法)的了解最詳細是來自於被珍藏於大英博物館中的。猜設如下： 假設一個人想要製造一個兩倍於一已知正方形的正方形，他會怎麼做？他可能會把已知正方形的邊長兩倍，但他很快就會了解這麼做事實上是把正方形的面積放大了4倍。如果他觀察這個被放大了4倍的正方形，他可能會為了畫那4個已知正方形的對角線而連接大正方形各邊的中點。因為這些對角線能把這四個正方形切成一半，於是他便製造了一個兩倍於原已知正方形的正方形。另外，這麼做製造了一個較小的正方形位於已被4倍的正方形的中央，且有4個全等的直角三角形位於四周。其中，此較小正方形的邊長恰好是周圍直角三角形的斜邊。所以，結論是以任河直角三角形的斜邊為邊的正方形的面積，會等於以兩股為邊的正方形面積的和。這就是畢氏定理。到目前為止，我們不難發現，雖然巴比倫證法是連接大正方形的中點來製造兩股相等的直角三角形，但只要我們旋轉中間以斜邊為邊的正方形，且保持此正方形的頂點在大正方形的邊上，也就是說，我們不把中央的正方形局限於是大正方形的一半，我們仍然可以得到與劉輝的證明一樣的圖形。

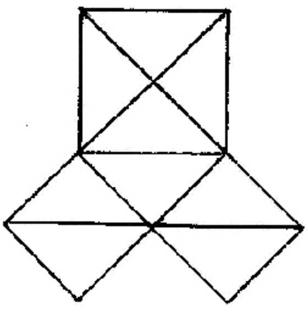


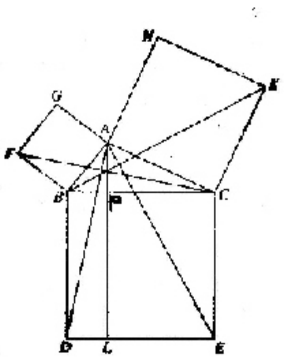
(a) (b)

(a) Doubling a square (b) The Kou-Ku-Shian Theorem

同樣地，在印度、埃及和阿拉伯這些不同的文明中，也發現了畢氏定理以不同形式出現的紀錄數學家們是從上的幾何問題開始研究埃及的幾何。在解釋埃及有關於畢氏定理的紀錄的文獻中，Cantor的解釋是最重要的之一。埃及人運用「繩索- 」來測量方向。再加上其他的線索，Cantor 的結論是，埃及人利用直角來決定廟宇的方位。他們的方法是，將一條繩子繞過三支釘子形成一個三角形，且使得三邊的長為3：4：5。其中一股的方位對準南北線，則另一股便會對準東西線。而這東西線就正是建造廟宇的方位。根據柏林博物館中皮革檔案，「 」出現在時期的早期。如果Cantor 的解釋是正確的，埃及人早在西元前2000年便已熟悉直角三角形中眾所皆知的3：4：5的特例。而若果真如此，那我們說「畢氏定理的埃及紀錄」就不是正確的。

畢達哥拉斯所提出的證明卻沒有流傳下來給我們。(事實上，他並沒有留下數學文獻) Cantor 認為早期的證明包含了特例的考量，像是等腰直角三角形的狀況就可能經由如下圖相連的圖形被證明。最下方4個三角形的面積和等於上方4個三角形的面積和。這就導出了畢氏定理。然而，畢氏定理的一般化證明是被歐基理德所提出的。





上述的事實顯示了畢氏定理在人類文明中的重要性與普遍性。然而古代人是如何「證明」或確認這個定理為真呢？如果你知道目前我們所熟練使用的符號代數是直到17世紀才大致成熟，就不會驚訝於為何畢氏定理的證明都是從面積的關係著手。

三、費馬的最後定理

相信大家都學過畢氏定理($x^2+y^2=z^2$)。17世紀的法國數學家費瑪進一步宣稱：當n>2，$x^n+y^n=z^n$，是沒有整數解，即是用沒有三個整數，可以代入此數式。雖然如此簡單的敘述，但卻困擾整個數學界300年，成為數學史上最深奧的謎題，沒有人能證明此敘述，這就是著名的「費馬最後定理」。

一六三七年左右，法國業餘數學家費馬（Pierre de Fermat，圖一）在他的《不定方程式論》（丟番圖著）一書的邊緣記下：任何立方數不能分成兩立方數的和，任何四次方數不能分成兩四次方數的和，任何五次方數也不能分成兩五次方數的和，如此類推。這就是後世所稱的費馬最後定理(Fermat Last Theorem)： 設 n 是大於2 的正整數，則方程式 $x^n+y^n=z^n$ ，沒有正整數解。

參●結論

高斯(Gauss C.F 1777~1855)曾說：『在撒哈拉沙漠（Sahara desert）建立一座很大的畢氏定理圖形，作為與外星人溝通的工具』。梅文鼎（1633－1721）在其著作《幾何通解》中，開宗明義說:「以勾股解《幾何原本》之根」也就是說：「幾何即勾股」。克卜勒（Johannes Kepler，1571~1630）曾說：「幾何學的兩個寶藏：畢氏定理與黃金分割；前者如黃金，後者如珍珠」。無論中外古今數學家皆認同，畢氏定理在幾何學中扮演重要的角色。這個公式對許多人很有幫助，無論是在建築上或是數學方面都有很大的幫助。

在數學上方面，我們常用在直角三角形的邊長計算上，就像我們常常看到的3.4.5.三角形，也是用這個定理（$a^2+b^2=c^2$）証出來的，在建築上例如計算塔高都可以應用到此定理，數學是一門至善至美的學科，但是許多抽象代數符號的推導，對學生而言在學習上容易遭遇困難。縱使代數形式的證明有其嚴謹周全特性，然而圖解證明也有其簡明易懂的優點，更可以藉著視覺化的感受，進而對於數學的具體化有很大的幫助，這是圖解畢氏定理的主要目的。希望藉由簡易的圖解方法透過切割、平移、再重新組合，推導出平面上與空間中許多幾何形體的面積與體積公式，以及另類的柯西不等式(Cauchy Inequality)。

肆●參考文獻

一、蔡聰明，《數學的發現趣談》，台北：三民書局，2001年。
二、Serge Lang，楊淑芬譯，《數學傳播》第15卷第3期〈球的體積（上）〉。
三、Eli Maor，馮速譯《勾股定理－悠遊四千年的故事》，北京：人民郵電出版社，2010年。
四、昌爸工作坊-http://www.mathland.idv.tw/
五、台科大工職數學 C(第三章第一節)(P.134)
六、奇摩知識家