篇名：

探討生活中的排列組合

作者：

劉宗豪老師。私立高英高級工商職業學校。

壹●前言

在日常生活中，我們時常聽到「排列組合」這個名詞的出現，究竟他是一個單詞？還是兩個呢？

其實，「排列」與「組合」是兩個觀念，縱使感覺意思很近，卻有著顯著的差異存在。比如說：甲乙丙三人坐三個位置，可以獲得甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲等六種坐法；但若題目改為甲乙丙三人為一組，則無論怎麼坐，此三人都是同一組。

聰明的你，看出端倪了嗎？

沒錯，此二者有著“順序”上的差別，當順序併入考量時為「排列」，不考慮順序時則為「組合」。

貳●正文
一、計數規則

(一)加法原理

如果完成某件事的方法可區分成n個類別，而第 i個類別有x_i種方法(其中$i=1,2,3,...,n$)，且每個類別互不相干，那麼完成這件事的方法共有$x_1+x_2+....+x_n$種。

(二)乘法原理

如果完成某件事情可依序分成n個步驟，而第 i個步驟有x_i種方法可以完成它(其中$i=1,2,3,...,n$)，那麼完成這件事的方法共有 $x_1\times x_2\times....\times x_n$種。

有了乘法原理後，我們來看以下例子：

假設某教室內有n張椅子, 有n位學生依序選擇座位, 試問共有幾種不同的選法?

解這個問題可分n個步驟

步驟一：第一位學生先從n張椅子任選一張，共有n種選法。

步驟二：第二位學生從剩下的$n-1$張椅子任選一張，共有$n-1$種選法。

步驟三：第三位學生從剩下的$n-2$張椅子任選一張, 共有$n-2$種選法。

至步驟 $n-1$：第 $n-1$ 只能剩下的 2 張椅子任選一張，共有 2 種選法。

至步驟 n：第 n 位學生只能選剩下的一張椅子，故只有 1 種選法。

由乘法原理知: 共有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times 2\times 1$ 種選法。

我們通常會將 $n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times 2\times 1$ 用 $n!$ 來表示。讀做"n 階乘"。 即

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times....\times 2\times 1$

其中 $n=0,1,2,...,n$, 通常會將 $0!$ 定義為 1。

二、排列

排列大致分為直線排列、環狀排列與重複排列三種，以下我們一一介紹：

(一)直線排列
定義：從某些物件中取其一部份或全部，按照一定的順序排列。

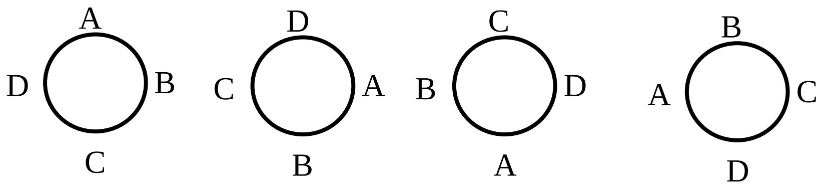
1. 相異物排列
從 n 個不同的事物中，選取 m 個來排列，其中 $n\geq m$。用 P_m^n 來表示，
即 $P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-1)....(n-m+1)$ 。
另外，規定 $0!=1$

2.不盡相異物排列
設 n 個物件中有 k 種不同種類的事物，第一類有 n_1 個相同，第二類有 n_2 個相同，....，第 k 類有 n_k 個相同，將此 n 個事物作直線排列，共有 $n=n_1+n_2+...+n_k$ 種方法，我們常以符號 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$ 來表示。

舉前面我們所看到的三人坐三個位置的例子來看：
若甲乙丙改為甲乙乙，則原本〈甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲〉則變成〈甲乙乙、甲乙乙、乙甲乙、乙乙甲、乙甲乙、乙乙甲〉，明顯得只剩三種坐法。

(二)環狀排列
定義：自 n 個相異事物中，每次取 m 個沿圓周或封閉曲線排列，其排列數為 $\dfrac{P_m^n}{m}$ 。

例如：ABCD 四個人圍成一個圓圈，請問有幾種方法？
[解]：若將 ABCD 四人視為直線排列，共有 4！種方法，而就圍成一圈的觀點來看，



以上的四種排列 ABCD、DABC、CDAB、BCDA 均視為同一種排法，因此 ABCD 四個人圍成一個圓圈，共有$\frac{4!}{4}$種方法。

(三)重複排列
定義：從 m 種不同之事物選取 n 個排成一列，但可以重複選取，這種排列稱為重複排列，排列方法有 m^n 個。

例如：有三封信要投入四個郵筒，將有幾種投遞方式？
[解]：
按照定義可得 4^3 種投法

三、組合

1. 全相異物不重複的組合

從 n 個不同物件中，取出 m 個不同物件的組合數為 $C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

例如：大樂透共有 49 個號碼，每取 6 個號碼稱為一組，全部共有多少種組合？

[解]：$C_6^{49} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$

2.重複組合

從 n 類東西中取出 m 件，(每類至少有 m 件)的組合數為 $H_m^n = C_m^{n+m-1}$

3.排列數與組合數的關係
$P_r^n = C_r^n \times P_r^r (r \le n)$

4.組合的重要性質

(1) $C_r^n = C_{n-r}^n \, (r \le n)$

(2)巴斯卡定理 $C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$

5.二項式定理
設 n 為任意正整數， xy 為任意數，則

$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + \cdots + C_r^n x^{n-r} y^r + \cdots + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k$

(1) 在 $(x+y)^n$ 的展開式中的所有二項式係數的和等於 2^n

$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$

(2) 在 $(x+y)^n$ 的展開式中的所有二項式係數,奇數項的和等於偶數項的和 ，即

$C_0^n + C_2^n + \ldots\ldots = C_1^n + C_3^n + \ldots\ldots = 2^{n-1}$

參●生活中的排列組合實例

舉下列各項生活中的例子做簡易說明：
(1)我們到餐廳點餐時，目錄上所列各式餐點自行搭配"組合"。
例：
早餐有蛋餅和三明治，飲料有紅茶、奶茶和咖啡，則我們能獲得下列選擇「蛋餅+紅茶、蛋餅+奶茶、蛋餅+咖啡、三明治+紅茶、三明治+奶茶、三明治+咖啡」

(2)人行道上磚塊的鋪排，為避免滑動而有規律的去"排列"著。

(3)比賽場上，假設有六支隊伍而兩兩需各比賽一場，則共能"組合"出 15 場比賽。

(4)繪畫時，為了讓圖畫更有規律美而進行色彩的"排列"。

(5)大樂透選號碼，每六個號碼為一"組合"，每組 50 元。

(6)出門時衣服的穿搭，顏色的選擇，屬於常見的"排列"。

生活中能看見的例子不勝枚舉，請各位看官再思考看看，你我的生活周遭還有哪些相關例子呢?

肆●結論

排列組合在生活上的應用頗多，可說是隨處可見。

例如目前台灣最風行的「大樂透，要算出所選號碼的組合數，只需將所選的號碼中，每 6 個當成一組來計算，即可算出能得多少組和需付多少錢。又譬如磁磚的紋路，要能夠讓外觀看起來優美，磁磚的排列就是一門學問了，而其使用到的原理就是排列。

或者說我們身上的服裝，設計師在設計衣服圖樣時，就能善用排列組合的觀念，用幾種類形圖案來讓衣服呈現了多樣化。棉被、床單、窗簾等，也都是利用的相同的概念來進行設計，以豐富了我們生活中的色彩。

而生活中另一個常見的主題--機率，其也廣泛使用了排列組合的觀念。因此，在高中高職這階段，一定需將排列組合學好，不僅用於課業升學，同時也是生活應用所能活用的。