篇名：

探討完全平方數在數論領域中之研究

作者：

私立高英高級工商職業學校。郭耀元老師

壹●前言

　　完全平方數是數論中的一環，藉由完全平方數也可以了解完全平方數在整數的應用及定義，更可衍生更多數學相關問題及應用。

貳●正文

一、定義：

　　數學上，平方數，或稱完全平方數，是指可以寫成某個整數的平方的數，即其平方根為整數的數。例如，9 = 3 × 3，它是一個平方數。平方數也稱正方形數，若 n 為平方數，將 n 個點排成矩形，可以排成一個正方形。

若將平方數概念擴展到有理數，則兩個平方數的比仍然是平方數，例如， (2 × 2) / (3 × 3) = 4/9 = 2/3 × 2/3。

二、舉例

$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

三、通項公式

　　對於一個整數 n，它的平方寫成 n^2。n^2等於頭 n 個正奇數的和 $\boldsymbol{n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)}$。從 1 開始，第 n 個平方數表示為前一個平方數加上第 n 個正奇數，如 5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 16 + 9。即第五個平方數 25 等於第四個平方數 16 加上第五個正奇數：9。

四、遞歸公式

　　每個平方數可以從之前的兩個平方數計算得到，遞推公式為 n^2 = 2(n-1)^2-(n-2)^2+2。例如，2×52 − 42 + 2 = 2×25 − 16 + 2 = 50 − 16 + 2 = 36 = 62。

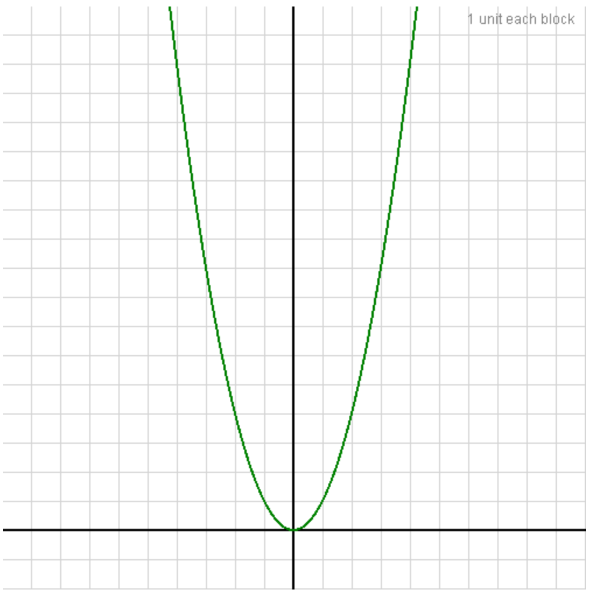
五、連續整數的和

　　平方數還可以表示成n^2 = 1 + 1 + 2 + 2 + ... + n − 1 + n − 1 + n。例如，42 = 16 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4。可以將其解釋為在邊長為 3 的矩形上添加寬度為 1 的一行和一列，即得到邊長為 4 的矩形。這對於計算較大的數的平方數非常有用。例如， 522 = 502 + 50 + 51 + 51 + 52 = 2500 + 204 = 2704.

六、性質

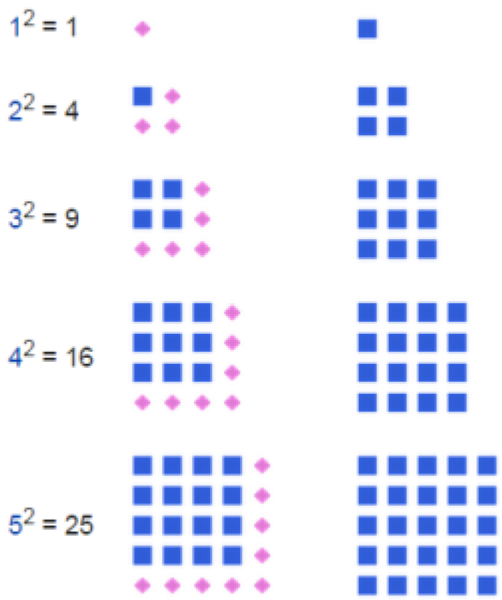
- 一個平方數是兩個相鄰三角形數之和。兩個相鄰平方數之和為一個中心正方形數。所有的奇數平方數同時也是中心八邊形數。
- 四平方和定理說明所有正整數均可表示為最多四個平方數的和。特別的，三個平方數之和不能表示形如 $4k(8m + 7)$ 的數。若一個正整數可以表示因數中沒有形如 $4k + 3$ 的素數的奇次方，則它可以表示成兩個平方數之和。
- 在十進制中，平方數只能以 00，1，4，6，9 或 25 結尾：
  1. 若一個數以 0 結尾，它的平方數以 00 結尾，且其他數字也構成一個平方數。
  2. 若一個數以 1 或 9 結尾，它的平方數以 1 結尾，且其他數字構成的數能被 4 整除。
  3. 若一個數以 2 或 8 結尾，它的平方數以 4 結尾，且其他數字構成一個偶數。
  4. 若一個數以 3 或 7 結尾，它的平方數以 9 結尾，且其他數字構成的數能被 4 整除。
  5. 若一個數以 4 或 6 結尾，它的平方數以 6 結尾，且其他數字構成一個奇數。
  6. 若一個數以 5 結尾，它的平方數以 25 結尾，且前面的一位或兩位數字數字必定為 0，2，06，56 之一。
- 每 4 個連續的自然數相乘加 1，必定會等於一個平方數，即 $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1 = (a2 + 3a + 1)2$。
- 平方數必定不是完全數。
- 平方數必定是 3 的倍數或者 3 的倍數+1。
- 平方數必定是 4 的倍數或者 4 的倍數+1。
- 是否在相繼正方形數之間存在一個素數這一命題，對 9000000 以內的數目是正確的。

七、函數圖形　y=x^2



八、表達式

一個整數是完全平方數若且唯若相同數目的點能夠在平面上排成一個正方形的點陣，使得每行每列的點都一樣多。



九、題目 1：一百盞燈開開關關數學謎題

桌上有編號 1~100 的一百盞燈及它們的按鈕開關，每按一下按鈕，那盞燈如果原本是關著的就會打開，如果原本是打開的就會關掉，一開始每一盞燈都是關著的，現在來了一百個人，第一個人去按了編號為 1 的倍數的所有按鈕，第二個人去按了編號為 2 的倍數的所有按鈕，第三個人去按了編號為 3 的倍數的所有按鈕，...依此類推到第一百個人按完後，請問有哪幾盞燈會是開著的？

解析：

每一盞燈會在輪到他的因數的時候被按，(如 7 號燈有因數 1 跟 7，第 1 跟第 7 個人會去按)，所以每一盞燈被按的次數就是它的編號的因數數量，一開始燈是關著的，而最後開著的燈就代表它的按鈕被按了奇數次，所以這個題目其實就是要找 1~100 裡面有奇數個因數的數字，怎麼判斷一個數字有幾個因數呢？

國中應該有學過，把數字寫成標準分解式，也就是分解成數個質數的相乘，如：$24=2^3 x3$, $36=2^2 x3^2$, ...然後把每個次方數+1 相乘，就是該數的因數個數，如：24 的因數有(3+1)x(1+1)=8 個，36 的因數有(2+1)x(2+1)=9 個，...假設一個數字的次方數分別為 a, b, c, ...，那麼他的因數就有(a+1)(b+1)(c+1)...個，若要(a+1)(b+1)(c+1)...是奇數，則(a+1), (b+1), (c+1), ...每個都要是奇數才行，那麼 a, b, c,...就每個都要是偶數，也就是這個數字是一些數的偶數次方相乘的結果，所以它一定是某個數的 2 次方，因此，有奇數個因數的數字，就是像 12, 22, 32, ...這類的完全平方數，把 1~100 裡的完全平方數都列出來，就是答案啦！

題目 2

求一個四位數，使它的四個數字和等於四次方和，並證明此數是唯一的。
解析：四次方是四位數的數，只能取值 6，7，8，9
然後，四個數的四次方分別是 1296，2401，4096，6561.
接著，逐一檢查。1+2+9+6=18≠6
2+4+0+1=7=7
4+0+9+6=19≠8
6+5+6+1=18≠9

最後得出結論，這個四位數是 2401
因為 5 的四次方為三位數；10 的四次方為五位數，故只有 7 的四次方符合題目需求，故得此數唯一。

題目 3
一個自然數減去 45 及加上 44 都仍是完全平方數，求此數。
解：設此自然數為 x，依題意可得
x-45=m^2 -----(1)
x+44=n^2 -----(2)
（m,n 為自然數）
(2)-(1)可得 :n^2-m^2=89 →(n+m)(n-m)=89
因為 n+m>n-m
又因為 89 為質數，所以：n+m=89---(3); n-m=1-----(4)
(3)+(4)，得 n=45。代入(2)得。X=2025-44 x=1981 故所求的自然數是 1981。

題目 4
証明：11,111,1111，11111……这串数中没有完全平方数。
解析：已知該串数中若存在完全平方数，则为末尾是 1 或 9 的数的平方。
当该串数中存在末尾为 1 的数的平方时，则 ，其中 n、k 为正整数。
但，已知 n^2需满足十位数为偶数，矛盾。
当该串数中存在末尾为 9 的数的平方时，则 ，其中 n、k 为正整数。
但 ，易知 n^2需满足十位数為偶数，矛盾。
解 2：完全平方數除以四餘數為 0 或 1，而根據除以四餘數性質（一個數除以四的餘數=這個數末兩位除以四的餘數）可得，這串數除以四餘數為 3，矛盾，所以這串數中沒有完全平方數。

題目 5 試求一個四位數，它是一個完全平方數，並且它的前兩位數字相同，後兩位數字也相同
解析：設該四位數為 1000a+100a+10b+b，則
1000a+100a+10b+b=1100a+11b =11（100a+b）
故 100a+b 必須被 11 整除=>a+b 被 11 整除，又因為(a+b)≦18
所以 a+b=11，

帶入上式得 四位數=11×（a×100+（11－a）） =11×（a×99+11） =11×11×（9a+1)

故 9a+1 必須為完全平方數。 由 a=2、3、4、5、6、7、8、9 驗證得， 9a+1=19、28、27、46、55、64、73。 所以只有 a=7 一個解；9a+1=9X7+1=64，此時 b=4。 因此四位數是 $7744=11^2\times8^2=88\times88$。

參●結論

由上可知，完全平方數在純數的領域中，扮演著相當重要的角色。且歸納出下列十點重要結論，給大家參考。

1.個位數是 2,3,7,8 的整數一定不是完全平方數；

2.個位數和十位數都是奇數的整數一定不是完全平方數；

3.個位數是 6，十位數是偶數的整數一定不是完全平方數；

4.形如 3n+2 型的整數一定不是完全平方數；

5.形如 4n+2 和 4n+3 型的整數一定不是完全平方數；

6.形如 5n±2 型的整數一定不是完全平方數；

7.形如 8n+2,8n+3,8n+5,8n+6,8n+7 型的整數一定不是完全平方數；

8.數字和是 2,3,5,6,8 的整數一定不是完全平方數。

9.四平方和定理：每個正整數均可表示為 4 個整數的平方和

10.完全平方數的因數個數一定是奇數。