

指數與對數

篇名：  
指數與對數

作者：  
劉宗豪 老師 私立高英高級工商職業學校

## 一、前言

近年來在統測或大學考試的內容中，指數與對數這單元的題目已有逐漸增多的現象，所以若針對考試方面來講，此單元的重要性顯而易見。若提到我們日常生活中是否用得上這些課程內容，那當然是非常廣泛的倍使用著，甚至於在許多大企業中所呈現的圖表曲線方式，在在都能展現出此單元的應用，儼然已成為課堂或生活中的重要課題。

## 二、正文

### (一) 指數

#### 1. 定義

對於每一個實數  $a$ ，以記號  $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$ 個  $a$  相乘)，叫做“ $a$  的  $n$  次方”，其中  $a$  為底數， $n$  為指數。

#### 2. 指數律

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3) a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$(4) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0, n > m)$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

#### 3. 指數的種類

##### (1) 正指數

若有一式子為  $a^n$ ，其中  $n > 0$  即稱為此。

##### (2) 負指數

定義任何不為 0 的數的  $-1$  次方等於它的倒數，例如： $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 。

##### (3) 零指數

我們定義  $a^0 = 1$ ，其中  $a \neq 0$ 。

##### (4) 分數指數

如果  $a$  是一個正實數， $n$  是正整數，那麼方程  $x^n = a$  只有一個正實數根。這個根被稱為  $a$  的  $n$  次方根，記作： $\sqrt[n]{a}$ ，其中  $\sqrt{\quad}$  叫做根號。或者， $a$  的  $n$  次方根也可以寫成  $a^{\frac{1}{n}}$ 。

#### 4. 指數在生活中的應用

(1) 科學記號

例如：光速  $300000000 = 3 \times 10^8$ 、亞佛加厥常數  $6.02 \times 10^{23}$

(2) 生活理財或銀行的複利計算

例如：本利和 = 本金  $(1 + \text{利息})^{\text{期數}}$

(二) 對數

1. 定義

若  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，而  $b$  為正數且滿足  $a^n = b$ 。

則  $n$  稱為以  $a$  為底數， $b$  為真數的對數，記為  $\log_a b$ ，即  $n = \log_a b$ 。

2. 性質

(1)  $\log_a 1 = 0$ 、 $\log_a a = 1$

(2)  $\log_a x \times y = \log_a x + \log_a y$

(3)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(4)  $\log_a x^n = n \log_a x$

(5)  $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$

(6)  $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$

(7)  $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$

(8)  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(9)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

3. 常用對數

以 10 為底數的對數，且  $\log_{10} b$  可簡略為  $\log b$ 。

4. 首數與尾數

設正實數  $A$  的科學記號表為  $A = a \times 10^n$  時， $\log A = \log a + n$ ，其中整數  $n$  是  $\log A$  的首數，而小數 ( $0 \leq \log a < 1$ ) 是  $\log A$  的尾數。

5. 對數表

對數  $\log_{10} x$  ( $1 \leq x < 10$ )，利用表尾差可求得真數到小數點以下第三位之對數值，且其對數值為有效數字四位的小數。

## 6. 自然對數

以無理數  $e \approx 2.71828\dots$  為底數的對數

### 三、結語

留意我們生活的周遭，到處可見到數學與之相關的事物。而本單元在國中或高中職課程中，也扮演著範圍極大且重要的角色，起碼在考試方面是如此。當我們跳脫課本而來到生活上，是否也能看見與課程相關得應用呢？答案是肯定的。

我們試著將所知所學應用於日常生活中，讓生活能更加如意順暢，好比我們用指數來簡略許多的數學式，也用這些數學式子來研究科學或其他各方面有需要用到的地方。

在此，僅是針對高職課程中所可能呈現的部分做簡略說明，以提供給各位學子們一種簡易且輕鬆的學習與認知，詳細內容在正課中將會逐一講解。