# 微積意識

任教科別：數學科　作者：劉宗豪 老師

## 摘要

微積分是微分和積分的合稱。微分是用來研究變化率，而積分是用來求積的（即算曲線長、面積、體積）。但就像乘法和除法一樣，微分和積分兩者之間卻有互為反運算的密切關係，所以必須合起來一起研究，因而合稱為微積分。

17 世紀有許多的數學家、天文學家和物理學家對微積分有著極大的貢獻，譬如：笛卡兒、費馬、克卜勒、卡瓦列利等。而 17 世紀下半葉，英國科學家牛頓和德國數學家萊布尼茲，分別在自己的領域中研究並奠定了微積分的基礎。當中牛頓的微積分著重在運動學方面，而萊布尼茲則側重於幾何學方面。

# 壹、前言

微積分在數學上或生活上應用很廣,尤其在工程方面和求解面積體積更是不可或缺的一門學科。在高中職階段，因為考試制度上的需要，學子們開始接觸於微積分的基本公式應用，也初步了解極限值的概念。

此文主要針對微積分的初步介紹及相關定理應用,並從中了解微分和積分的不同之處所在。

# 貳、正文

## 一、微積分的起源

微積分學在古代就有出現過,但奠定基礎而正式被廣為使用是在17世紀時。公元前三世紀，古希臘的阿基米德在研究解決拋物弓形的面積、球和球冠面積、螺線下麵積和旋轉雙曲體的體積的問題中，就隱含著近代積分學的思想。作為微分學基礎的極限理論來說，早在古代以有比較清楚的論述。比如我國的莊周所著的《莊子》一書的“天下篇”中，記有“一尺之棰，日取其半，萬世不竭”。三國時期的劉徽在他的割圓術中提到“割之彌細，所失彌小，割之又割，以至於不可割，則與圓周和體而無所失矣。”這些都是朴素的、也是很典型的極限概念。

到了十七世紀，有許多科學問題需要解決，這些問題也就成了促使微積分產生的因素。歸結起來，大約有四種主要類型的問題：第一類是研究運動的時候直接出現的，也就是求即時速度的問題。第二類問題是求曲線的切線的問題。第三類問題是求函數的最大值和最小值問題。第四類問題是求曲線長、曲線圍成的面積、曲面圍成的體積、物體的重心、一個體積相當大的物體作用於另一物體上的引力。

十七世紀的許多著名的數學家、天文學家、物理學家都為解決上述幾類問題作了大量的研究工作，如法國的費馬、笛卡兒、羅伯瓦、笛沙格；英國的巴羅、瓦里士；德國的克卜勒；義大利的卡瓦列利等人都提出許多很有建樹的理論。為微積分的創立做出了貢獻。

十七世紀下半葉，在前人工作的基礎上，英國大科學家牛頓和德國數學家萊布尼茨分別在自己的國度里獨自研究和完成了微積分的創立工作,雖然這隻是十分初步的工作。他們的最大功績是把兩個貌似毫不相關的問題聯繫在一起，一個是切線問題，一個是求積問題。

牛頓和萊布尼茲建立微積分的出發點是直觀的無窮小量,因此這門學科早期也稱為無窮小分析,這正是現在數學中分析學這一大分支名稱的來源。牛頓研究微積分著重於從運動學來考慮,萊布尼茨卻是側重於幾何學來考慮的。

## 二、微積分的內容

內容區分為「微分學」和「積分學」兩類:

1.「微分學」

主要研究的是在函數自變量變化時如何確定函數值的瞬時變化率(導數或微商)。換言之,計算導數的方法就叫微分學。微分學的另一個計算方法是牛頓法,該算法又叫應用幾何法,主要通過函數曲線的切線來尋找點斜率。費馬常被稱作「微分學的鼻祖」。

2. 「積分學」

積分是微分的逆運算,即從導數推算出原函數,又分為定積分與不定積分。一個一元函數的定積分可以定義為無窮多小矩形的面積和,即等於函數曲線下包含的實際面積。我們也可以用積分來計算平面上一條曲線所包含的面積、球體或圓錐體的表面積或體積等。從技術上來講,積分學是研究對這兩個相關的線性算子的研究。

## 三、常見的微積分應用問題

1. 位移、速度和加速度:

   若已知一物體運動的位移$s$,$s$是時間$t$的函數,求該物體運動時的速度$v$和加速度$a$。

2. 曲面的切線:

   此為幾何學上的問題,同時也應用於光學方面。早期科學家在製作光鏡時,因為想了解光線射中鏡面的角度,因而產生了光學反射律。在古希臘時期,橢圓切線的定義是一直線與該橢圓恰交於一點。

3. 函數極值:

   伽利略曾經在17世紀初證明得到,砲彈最大射程是他的發射角為45度時,此為發射角的函數。另外,科學家們找尋行星與太陽間最遠或最近的距離,也屬於此類極值方面。

4. 面積、體積及重心:

   利用積分定理來計算,並注入無窮極限之概念。

## 四、牛頓與萊布尼茲

雖然古時候就有出現微積分的概念，但對後期的數學微積分影響最大者，莫屬於此兩位偉大的物理學家與數學家了。針對兩位在微積分上的貢獻，在此做一些簡單的介紹以供參考。

(一)牛頓(Newton 1642-1727)

牛頓出生於英國的小鄉村—物碩浦，從小成績並非頂尖，甚至曾在中學時考試數學科歐氏幾何成績偏差，一度打算去就讀宗教學。直到大學時讀了數學家笛卡兒所著的”幾何學”，才開始對數學產生了興趣。他曾有過一名言：「如果我比笛卡兒看得更遠，那是因為我站在巨人的肩膀上。」

他對微積分最大的貢獻是發現了微積分基本定理，爾後陸續有研究微分方程，也曾發布過隱函數的微分概念、曲線的切線、函數的極值、曲線的曲率、曲線的拐點等數學方面的知識。

微積分基本定理(Fundmental Theorem of Calculus)：

設 $f:[a,b]\to R$ 為一連續函數，則可知

1. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ，則 $F'(x)=f(x)$ ，其中 $x\in[a,b]$

2. 若 $G'(x)=f(x)$ ，其中 $x\in[a,b]$，則 $\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$

(二)萊布尼茲(Leibniz 1646-1716)

萊布尼茲在大學時先是修習法律方面知識，後改修哲學，原本也非數學方面的專家。直到博士班畢業後，於西元 1671 年製作了計算機給父親算帳用，加上 1672 年時以外交家身分駐進法國巴黎，也在該地遇見許多的數學家，從此對數學各方面知識產生濃厚的興趣。

他在微積分方面主要貢獻為創造出簡便的使用符號，如：$\int$ 表示積分，$dx$ 表示微分，$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}$ 表示鍊法則。

同時他也創作出許多微積分公式，我們目前在高中職所學到的應用很廣：

1. 分部積分公式：$\int xdy=xy-\int ydx$

2. $dx^n=nx^{n-1}dx$ ，$n$ 為有理數

3. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

4. $d(u+v)=du+dv$

5. $d(au)=adu$

6. 萊布尼茲公式：$d(uv)=udv+vdu$

7. 曲線長：$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$

8. 沿 $x-$ 軸轉動體的體積為：$V=\pi\int y^2dx$

(三)兩位偉大學者的比較

1. 共同點：
   (1)讓微積分成為普遍使用的方法。
   (2)利用代數取代幾何原理。
   (3)解決了四型問題：變率、切線、極值和求和。
2. 不同點：
   (1)牛頓發展 $\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的概念，萊布尼茲著重 $dx$ 微分。
   (2)牛頓的微分觀念主要用來解決物理問題，萊布尼茲的微分觀念主要用來了解曲線的切線。
   (3)牛頓研究微積分的方法是縝密而實驗證明的，萊布尼茲主要是理論方面即選定好使用的符號給予後人影響甚鉅。

## 叁、結語

我們在生活中可以看見許許多多微積分的應用，只是差別在是否有特殊需要去使用到，無論是學生在求學求知時用到，亦或是真正工程求知所需要，微積分學在數學史上的貢獻是無與倫比的。

微積分學的創立也極大推動了數學的發展，過去很多數學家束手無策的問題，當碰上微積分時往往可以輕鬆以對，也顯現出其偉大的地位。

## 肆、參考文獻

數學的故鄉—王懷權 編著。
有關數學的100個觀念—刑豔 編著。
數學知識--曹亮吉(台大數學系)。
維基百科