

# 數學與文明

任教科別：數學科 作者：李芳俞 老師

## 摘要

數學符號涉及人類文明的起源、東西文化的交融、心理學的解釋、歷史的定義。有如一棵生命樹，它隨著文明發展而榮枯，歷史學家甚至可以由一個時代的數學發展，窺得該時代的成就特徵。

數學在不同的歷史文化中所呈現的多元面貌，為「數學是世界的語言」這句話做了最佳的詮釋，讓我們看到數學不僅僅是加減乘除，更與我們的生活息息相關。

## 壹、前言

文明的發展與數學的發展是分不開的，數學自古至今在我們生活中不可或缺。而且數學又是哲學家表達自己思想的一種工具。從中我們可以發現我們學過的數學公式裡也暗含著生活的公式。

## 貳、正文

### 一、數的起源

古代數學，起源於人類早期的生產活動，產生於商業上計算的需要、了解數字間的關係、測量土地及預測天文事件。我國古代把數學叫算術，又稱算學，最後才改為數學。

大約在 300 萬年前，處於原始社會的人類用在繩子上打結的方法來記數，並以繩結的大小來表示野獸的大小。數的概念就是這樣逐漸發展起來的。

在距今約五六千年前，古埃及人較早地學會了農業生產。尼羅河每年 7 月定期泛濫，11 月洪水逐漸減退。當時古埃及的農業制度，是國王分配同樣大小的正方形土地給每一個人，耕種的人每年提取收穫的一部分交租。如果洪水衝垮了他們所耕種的土地，他們可以報告國王，國王就派人前來調查並將損失的那一部分測量出來，這樣，他們可以相應地少交一些租。

這種對於土地的測量，最終產生了幾何學。實際上，幾何學本來就是「土地測量」的意思。數學就是這樣從「結繩記數」和「土地測量」開始的。

和結繩幾乎同時或者稍後的一種記數方法，要算是書契了。書契，就是刻、劃，在竹、木、龜甲或者骨頭、泥版上留下刻痕，留下「記」號。《釋名》一書中說：「契，刻也，刻識其數也。」意思是在某種物件上刻劃一些符號，以記數。

我們國家 1974 年在青海樂都縣發掘的原始社會末期的墓葬中，發現 49 枚骨片，大小形狀都差不多，是與小孩的小手指差不多大小，但很薄的一個長方形。在骨片的中部兩側有刻口，有的帶 3 個刻口，有的帶 5 個刻口，不少是帶一個刻口的。如果一個刻口代表一個數的話，那麼這 40 多枚骨片大約可表達從一到五六十間的任何一個自然數。隨著刻痕刻印的發展，漸漸地就出現了純粹的數字符號。這可是一項光輝偉大的成就。

距今兩千多年前，在歐洲東南部生活的古希臘人，繼承和發展了「結繩記數」和「土地測量」這些數學知識，並將數學發展成為一門科學。

古希臘文明毀滅後，阿拉伯人將他們的文化保存下來並加以發展，後來又傳回歐洲，數學重新得到繁榮，並最終導致了近代數學的創立。

### 二、數的應用

埃及人與巴比倫人把他們的數學用到許多實際的問題上。在留下的草紙及瓦片上，我們可以看到期票、信用狀、抵押、延期付款以及商業盈利的分配。雖然

這些商業交易只用到了算術與代數，另有幾何的公式說明了土地的面積以及在圓柱形及金字塔形糧倉內的穀物容量。除此之外，巴比倫人與埃及人還是不屈不撓的建築者。就是在現今摩天大樓的時代，他們的寺廟與金字塔對我們來說都是了不起的成就。

如果說魔鬼藏在細節裡，那麼古埃及的數學就藏在神祕裡，隨著人類對古埃及日益增多的了解，藏在神祕中的數學也就逐漸被我們知曉。

古埃及乘除法，它是一種非常獨特的運算方法，基本上是利用加倍與折半運算法則，將乘除法以較簡單的加法予以簡化，運算方法十分快速簡單，且有規則性，說穿了這種方式很像現代電腦運算之二進位法則，可想見當時古埃及人數學運算能力已相當厲害。

### ※神奇古埃及乘除法

乘法以  $17 \times 13$  為範例：

|    |     |
|----|-----|
| →1 | 17  |
| 2  | 34  |
| →4 | 68  |
| →8 | 136 |
| 16 | 272 |

$1+4+8=13$      $17+68+136=221$

運算步驟：

1. 決定其中一數為被乘數(17)
2. 將被乘數(17)不斷加倍，並把倍數(2的倍數)寫在左側
3. 使左方倍數之和等於乘數( $1+4+8=13$ )，則其分別對應到的數之和即為所求  
( $17+68+136=221=17 \times 13$ )

除法以  $19 \div 8$  為範例：

|      |    |
|------|----|
| 1    | 8  |
| →2   | 16 |
| 1/2  | 4  |
| →1/4 | 2  |
| →1/8 | 1  |

$19 \div 8 = 2 + 1/4 + 1/8$      $16+2+1=19$

運算步驟：

1. 決定其中一數為除數(8)
2. 將除數(8)不斷加倍，發現無法找到答案
3. 將除數(8)不斷折半，並把倍數(2的倍數)寫在左側
4. 使右方數字之和等於被除數( $16+2+1=19$ )，則其分別對應到的數之和即為所

求 $(2+1/4+1/8=19/8=2.375)$

破解原理：任何數皆可以 2 的乘冪之和表示

### (一) 數學與天文的對話

把天文及數學用到航海及曆法之前，人早就懷著天生好奇與敬畏自然的心情，無可壓抑的哲學驅策力，耐心地觀察了太陽、月亮以及星星的運動有幾世紀之久。這些觀測者，雖然困擾於自然的神秘，卻克服了儀器之不足、數學知識之極端貧乏，而能從觀測中理出星球的運行模式。就是這些人在非常早期的埃及文明中，就已經知道一個太陽年有 365 天。

他們的耐心與恆心達成更大的成就，他們發現天狼星會在尼羅河洪水到達開羅的那一天日出時出現在天邊。這樣的發現一定過了幾年後，大家才想到要觀察天狼星的行逕，以預測洪水的來臨。更有甚者，因為日曆年的 365 天和真正的太陽年相差四分之一天，過了幾年後，日曆再也不能預期什麼時候天狼星會出現在天邊。只有在 1460 ( $= 4 \times 365$ ) 年之後，日曆與天狼星的位置會再一次吻合。埃及天文學家也知道這種 1460 年的天狼星周期。人類一定得先認知這種天體的規則性，才會想到怎樣運用它。

一旦經由天文與數學的研究發現了這樣的規則性，巴比倫與埃及人就知道要觀察星空的面貌。他們隨著星空的變化而狩獵、而漁事、而耕作、而收成、而舞蹈、而舉行宗教儀式。不久，星座就因其出現時人們有那些活動而命了名。獵戶座、雙魚座至今都還在那兒。

### (二) 數學與建築的對話

宗教神秘更直接在壯麗的寺廟與金字塔的建造與定向上，以更幾何形式表現出來。每一個巴比倫的大城都要建造一個塔形的寺廟。這是矗立的好幾層梯形壇上的大建築物，可經由寬潤的石階達於其上，而且從數哩之外就可清楚地看到，埃及的寺廟與金字塔當然是眾所周知的。埃及人在計算數量時都以十進位換算，100 萬為最大計算單位。

由加法及減法為運算基礎的算術經轉換後可推演至乘法及除法。 $2/3$  及  $3/4$  外的分數都是以 1 為分子，因此  $7/32$  可表為  $1/8+1/16+1/32$ 。埃及人能利用他們所發展的幾何學來計算正方形、梯形、三角形及圓形的面積；計算四面體（即金字塔）的高度及角度；甚至可以計算圓柱體及被切割後四面體的體積。真正代表埃及人數學成就是建築金字塔時所需精確的巨石數目。

### (三) 數學與音樂的對話

巴哈不僅是位傑出的音樂家，同時也是一位優秀的數學家，他仔細研究十二平均律並運用此法創作樂曲，他的《平均律鍵盤曲集》就是採用十二平均律而作成的樂曲，它甚至被譽為鍵盤音樂中的「舊約聖經」，

在西方古典音樂歷史上佔有重要地位，至於流傳千古的〈聖母頌〉則是巴哈根據《平均律鍵盤曲集》中的〈C大調前奏曲〉所創作的聖樂，全曲不但充滿人們對上帝無上的崇敬，也將聖母對世人的真愛與慈悲於曲中表露無遺，讓人有淪肌浹髓之感。

巴哈運用他在音樂和數學方面的天分，巧妙地將令許多人頭痛的數學理論導入音樂，並創造出撫慰人心的樂曲，令人佩服萬分！

自古以來，西方的數學和音樂就是「一體」的，數學與音樂之間的關係不只是用「密切」來加以形容，它們是「不分家的」。古希臘一位天才橫溢的數學家畢達哥拉斯(Pythagoras, 540B. C.，約中國孔子的年代)，就曾經以數學數列來描述一種音律的弦長之比，我們日後便稱由此比例出彈出的音律為畢氏音階。

有一天畢氏經過一家打鐵店，被其中有節奏且悅耳的打鐵聲吸引住了，發現裡面有四個人，分別拿了四個重量不同的鐵鎚，這四個鐵鎚重量的比恰好是12：9：8：6。當兩個鐵鎚的重量比分別是12：9、12：8和12：6時，一起敲打所發出來的聲音聽起來相當和諧。

他回去之後，進一步利用當時專為審度音律之用的樂器單弦琴做了實驗，得到兩項重要發現：

1. 兩個聲音能夠聽起來和諧悅耳，跟兩弦的長呈簡單整數比有關。
2. 兩音弦長的比是4：3、3：2、2：1時是和諧的，它們的「音程」分別是四度、五度和八度。所以，對畢氏而言，「音樂就是整數比」。

當時畢氏還無法利用頻率來實驗，僅能根據弦長來驗證音與音之間的比，不過，利用「五度音循環法」，由1出發，除了F音必須降低五度求得之外，其餘連續升高五度(即連續乘以 $\frac{3}{2}$ )五次，再把超過八度的音降低八度(除以2)，或低於八度音的升高八度(乘以2)。

### 叁、結語

我們在雄偉的金字塔中看見古埃及人的數學，在動聽的西方古典音樂中聽見數學，甚至在莊嚴肅穆的日本寺廟中發現數學，讓我十分驚訝原來數學是那麼多元，和我們的歷史文化是那麼緊緊相依、密不可分，並充滿於生活周遭中。

藝術大師羅丹曾說：「我們的生活不是缺少美，而是缺少發現。」的確，數學充滿我們周遭，俯拾即是，只要我們用心體會，細細品味，一定可以發現它有趣的一面。

### 肆、參考文獻

曹亮吉(2003)。阿草的數學聖杯。台北：天下文化。

洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏(2009)。當數學遇見文化。台北：三民。

川久保勝夫(2003)。圖解數學基礎入門。台北：世茂。