幾何與黃金分割

任教科別：數學科　作者：張雅淳 老師

摘要

達文西的名畫—蒙娜麗莎的微笑、古埃及的金字塔、希臘雅典的帕德嫩神廟、還有許多人所追求的完美身材……等等的，在日常生活中，有很多事物都和黃金比例密不可分，在文藝復興時代，義大利以神聖比例來稱呼它，認為黃金比例是最完美的比例。

壹、 前言

十七世紀發現行星運動三大定律的德國著名天文及數學家克卜勒（J. Kepler）(圖 1)，對黃金分割讚美說：「幾何學裡有兩件寶，一件是畢達哥拉斯定理，另一個是黃金分割。如果把畢達哥拉斯定理比作黃金礦的話，那麼黃金分割就是寶石礦了。」

圖 1：克卜勒（德國人 1571～1630 年），德國天文學家、物理學家、數學家。1598 年跟隨第谷（Tycho Brahe）研究天文，最大成就是發行星運動三大定律。克卜勒也是早期微積分的先驅者之一，他在〈酒桶新立體幾何〉著作中用通俗的語言引入了無窮小的概念。

貳、 正文

一、黃金分割的起源

西元前四世紀，古希臘的數學家提出了這樣一個線段分割問題：如圖 2 在線段上尋找一點 C，使得長線段 CA 與短線段 CB 之比等於全線段 AB 與長線段 AC 之比，即滿足 AC：CB＝AB：AC。此線段的作圖工具仍然只限於直尺和圓規兩種。

圖 2：黃金分割的問題是如何在線段 AB 上找一點 C，使 AC：CB＝AB：AC。

二、黃金分割的作法與證明

1. 作法：

圖 3：尤多克薩斯（Eudoxus of Cnidus，希臘人，約西元前 408～355 年）〈黃金分割〉

這個問題終於由尤多克薩斯(圖 3)解決了，他的解決方法如下：
如圖 4，設 AB 是需要分割的已知線段。以 AB 為邊作正方形 ABGD，取 AD 的中點 E，連結 EB，並延長 DA 到 F，使 EF=EB。以 A 為圓心，AF 為半徑畫圓，交 AB 於 C，這 C 點就是所要找的分點。

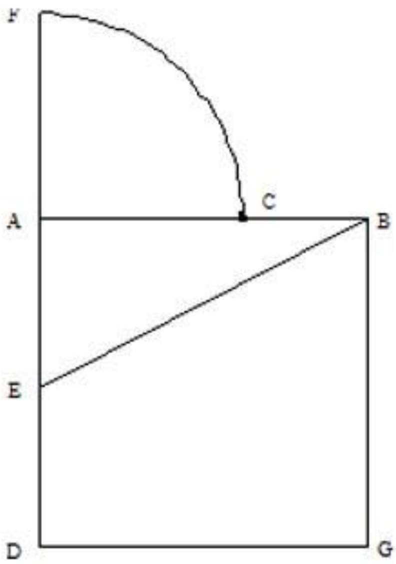


圖 4：黃金分割的幾何作圖

2.證明：

上述的幾何作圖，證明如下，如圖 5：

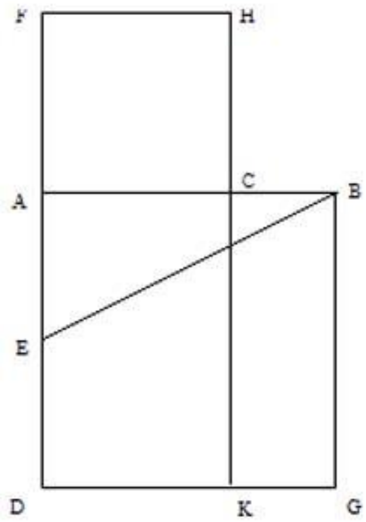


圖 5：黃金分割的證明

EB2=EF2=(FA+AE)2=FA2+2AE・FA+AE2……(1)

同時由直角△AEB，知：EB2=AB2+AE2 代入(1)的左邊，得：

AE2+AB2=FA2+2AE・FA+AE2……(2)

又，因為 2AE=AD，FA=AC；代入(2)得：

AB2=FA2+AD・AC……(3)

由(3)知正方形 ABGD 面積=正方形 FAHC 面積+長方形 ACKD 面積，所以：

矩形 ACKD 面積+矩形 CBGK 面積=正方形 FAHC 面積+長方形 ACKD 面積……(4)

由(4)，得知：

矩形 CBGK 面積=正方形 FACH 面積

因此 ：CB・CK=AC2，即 CB・AB=AC2

三、黃金分割名稱的由來

圖 6-a：達文西（義大利，西元 1452～1519 年），文藝復興時期著名的藝術家、科學家。成名的畫作有：〈最後的晚餐〉、〈蒙娜麗沙〉。

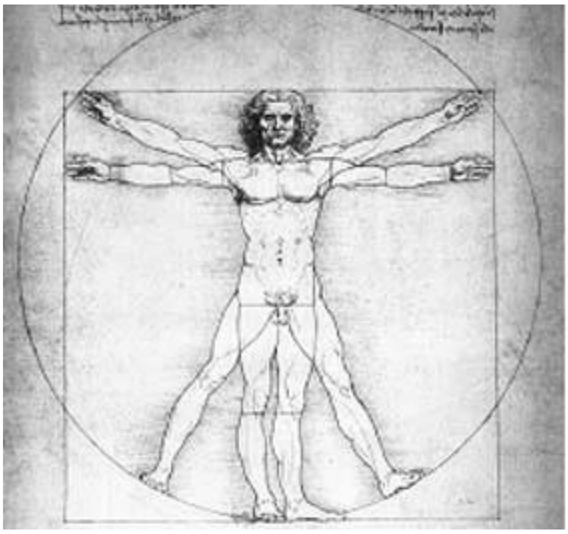


圖 6-b：達文西對人體比例的研究

圖 6：達文西的人體比例研究作品中可看出他對數學比例的重視

AC：CB=AB：AC 這個關係式，最初稱為“中外比”，第一個將這個比例關係稱為“黃金分割”的據說是達文西（Deonardo Da Vinci）（圖 6）。

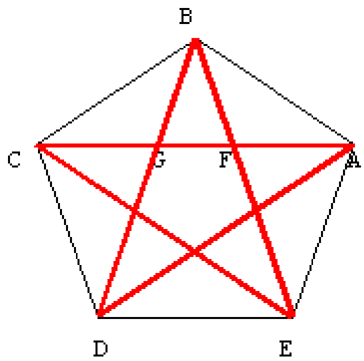
達文西是文藝復興後期意大利最傑出的畫家，他的名作〈最後的晚餐〉和〈蒙娜麗莎〉是世界繪畫史上的瑰寶。他和他同時代的畫家皆認為幾何學與繪畫有密切的關係，繪畫的精髓是將幾何的透視原理表現在圖畫上。因此他十分注意透視原理及線段間比例的研究。他在充分研究中外比的幾何意義後，揭示了中外比在藝術中的重要地位，將它稱之為黃金分割。

得 AC：CB=AB：AC

四、幾何圖形中的黃金比例

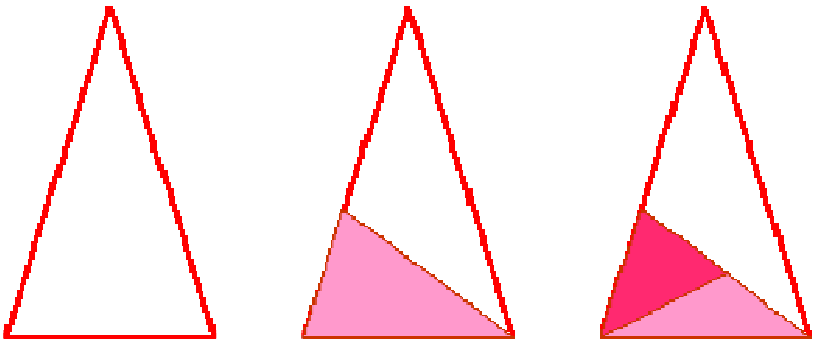
01. 正五角星

畢達哥拉斯學派(畢氏定理)的代表徽章---正五角星中就隱含了許多黃金分割。例如，F 分割線段 CA，G 分割線段 CF。



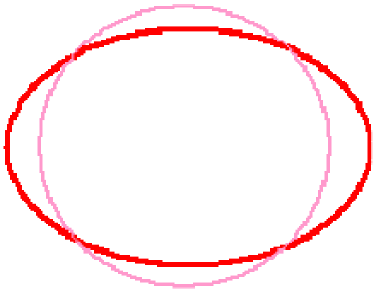
02. 黃金三角形

頂角為 36°角的等腰三角形，其底與腰之比恰為黃金比例。如圖，可不斷製造出黃金三角形。



03.　黃金橢圓

短軸與長軸之比為 0.618 的橢圓。以黃金橢圓之焦距為直徑的圓，其面積與此黃金橢圓相等。



04.　黃金矩形

長和寬的比為 1：0.618 的矩形，被喻為比例最勻稱的矩形。已被廣泛應用於藝術創作及建築中。

五、黃金比例的應用

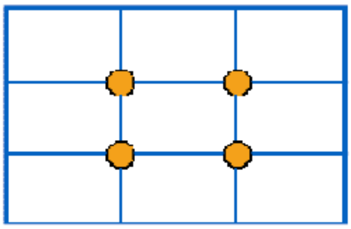
1.生活中的黃金比例

A.　我們慣常使用的 3x5 照片，寬長之比為 0.6，幾乎就是黃金矩形。

B.　拍照時，主體位置應以安排在畫面縱與橫各三等分的黃金分割線之四個交叉點的其中一點為佳。此四點不但最具人類視覺的集中作用，亦具有畫面的安定感及變化性。不過在故意製造畫面的不安定感時，則可排除黃金律的拘束，而以不安定的構圖來製造欲傳達的氣氛。

C.　電視新聞報導時，主播的位置經常被安排在畫面的黃金分割點，而非正中央。

D. 音樂領域中，黃金比例亦大有用途。演奏弦樂器時，在琴弦的黃金分割點撥弄，琴音最悅耳。



02.藝術中的黃金比例

A. 達文西本人也是黃金比例的的信仰者，在他的作品中處處隱藏著黃金比例。

下圖一，達文西 / 蒙娜麗莎 / 完美的黃金比例，流露著莊嚴、和諧、神秘的氣質。

圖一：黃金比例

圖二：違反黃金比例

03.建築中的黃金比例

A. 古埃及金字塔為正四角錐體，塔高與底部正方形邊長之比為黃金比例。足見西元前兩千多年的人們就已經發現了黃金比例。

B. 巴黎艾非爾鐵塔，第二層以下和第二層以上之比設計成黃金比例。因此整體結構看起來完美、壯觀。

04.人體中的黃金比例

A. 人在精神愉快時，的腦電波頻率下限約八赫茲，上限約 12.9 赫茲；上下限之比近於黃金比例。

B. 人體最舒適的溫度約為攝氏 22～24 度，是人體正常體溫的黃金分割點(23/37=0.618)。在這溫度範圍，機體的新陳代謝、生理節奏和生理機能都處於最佳狀態。

C. 以黃金分割應用到人體審美觀來看，很多藝術家相信，以人體的腳底至肚臍的長度若為身長的 0.61803 倍，則看起來感覺最順眼、最美，但大部分的人此比例約在 0.5~0.6 倍之間，所以有的人以穿高跟鞋或厚底鞋來修正其比例，冀望能使自己的外形看起來達到最美，但必須以此觀念先計算出最適合自己身高的鞋子厚度後再來挑選，否則反而會弄巧成拙。請你試試看，以此原理來幫你的親友算出最適合他們個人的鞋子厚度。

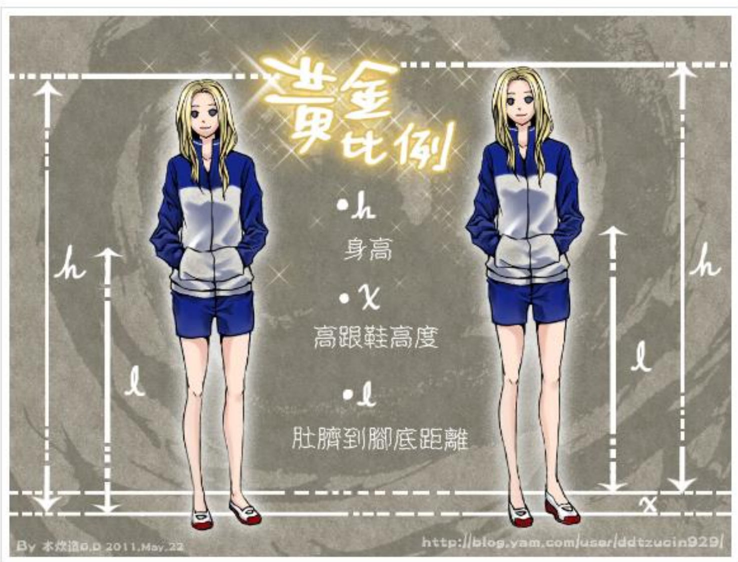


圖3. 以黃金比例計算適合的高跟鞋高度 $(x+l)/(x+h)\approx 0.618$

參、 結語

原來黃金比例竟然和我們的生活那樣的密不可分，不論是兔子的繁殖、花瓣的片數、建築和名畫的美感、……，都和黃金比例有關，如果這比例改變了之後，我們生活周遭許多事物都會有所變化，對於美的定義也會與先前不同，人類的生活勢必也會受到影響。

文藝復興後期的克卜勒曾經說：幾何學擁有兩件至寶，一件是畢氏定理，另一件便是黃金比例，可見人們以前就非常重視這比例，並由此創造出了許多建築和藝術作品，對於人類的美感、體型也都恰好發現和黃金比例有關，其實在我們的周遭還有許多與這有關的事物尚未被我們所發覺。

我們在雄偉的金字塔中看見古埃及人的數學，在動聽的西方古典音樂中聽見數學，甚至在莊嚴肅穆的日本寺廟中發現數學，讓我十分驚訝原來數學是那麼多元，和我們的歷史文化是那麼緊緊相依、密不可分，並充滿於生活周遭中。

藝術大師羅丹曾說：「我們的生活不是缺少美，而是缺少發現。」的確，數學充滿我們周遭，俯拾即是，只要我們用心體會，細細品味，一定可以發現它有趣的一面。

肆、 參考文獻

http://web.lib.fcu.edu.tw/libstories/archives/1874

http://www.fivedream.com/page1.aspx?no=221249&step=1&newsno=20707

http://www.gtes.ilc.edu.tw/ART/art4-7.htm

幾何圖形中的黃金比例
http://www.shsh.ylc.edu.tw/~t1046/theme/goldenratio/page2.html

黃金比例
http://www.shsh.ylc.edu.tw/~t1046/theme/goldenratio/page7.html