神奇的畫線乘法

任教科別：數學科　作者：張雅淳 老師

摘要

乘法口訣是中國古代籌算中的基本計算規則，春秋戰國時代發明了九九表。後來東傳入高麗、日本，經過絲綢之路西傳印度、波斯，繼而流行全世界。

西方文明古國希臘和巴比倫，也有發明乘法表，不過複雜些。巴比倫發明的希臘乘法表有一千七百多項，而且不夠完全。表格這麼長，算數當然辛苦了，所以在 13 世紀之前，一個能夠除大數的人，就會被視為數學家。

13 世紀，東方的計算方法通過阿拉伯人傳入歐洲，歐洲人終於擺脫了複雜的方法，將新方法放入大學教材。

2015 年 3 月，九九乘法表傳入英國後，因語言不同導致口訣變長，背誦較難，《一課一練》英國版中可能改為“12×12 乘法表”。

壹、 前言

印度式乘法

坊間很流行印度式的乘法，印度的小學生的乘法必須從 1×1 背到 19 × 19，而大家都對印度的小學生如何背到十位數的乘法感到非常好奇，據說他們有一套屬於自己的乘法公式，舉例來說，14×13 他們是這樣算的：

（1）14 ＋ 3 ＝ 17（或者 13 ＋ 4 ＝ 17 也可以）

（2）17×10 ＝ 170

（3）4×3 ＝ 12

（4）170 ＋ 12 ＝ 182

到底這樣算的秘密為何？可以乘法公式說明如下：14×13 ＝（10 ＋ 4）×（10＋ 3） ＝ 10×10 ＋ 10×（4 ＋ 3） ＋ 4×3＝ 170 ＋ 12 ＝ 182。印度乘法的步驟（1）～（2）可用乘法公式展開項的 10×10 ＋10×（4 ＋ 3）來解釋；而步驟（3）可用展開項的 4×3 來解釋。不過話說回來，靠這樣的步驟來計算其他的算是可行嗎？我們將題目改成 24×13 來算算看：

（1）24 ＋ 3 ＝ 27

（2）27×10 ＝ 270

（3）4×3 ＝ 12

（4）270 ＋ 12 ＝ 282

事實上，24×13 正確的答案為 312，不是 282 ！原因為何？我們依然以乘法公式解說如下：24×13 ＝（20 ＋ 4）×（10＋ 3）＝ 20×10 ＋ 4×10 ＋ 3×20 ＋ 4×3＝ 200 ＋ 40 ＋ 60 ＋ 12 ＝ 312。印度乘法的步驟（1）就錯了，而步驟（2）少掉的 30 即將展開式誤算為 20×10 ＋ 4×10 ＋3×10，這就是原因所在。由此可知，印度乘法只適合用於 10～19 的兩個兩位數的乘法，不能一以概括其他所有的算式。

俄式乘法

早期俄羅斯人也發明一種乘法的速算技巧，方法是每次將被乘數（或乘數）除以 2，同時乘數（或被乘數）乘以 2，但乘積不變。以 32×23 為例，32×23 ＝ 16×46＝ 8×92 ＝ 4×184 ＝ 2×368 ＝ 1×736。

以這樣的方法可以免去直式乘法的計算，改由簡易的心算即可得到答案。但是計算過程中若發生乘數（或被乘數）無法被 2 整除那怎麼辦呢？俄式乘法的算法式這樣的，以 35×52 為例：35×52 ＝70×26=140×13= 280×6=560×3=1120×1 途中若遇到某數無法被 2 整除時就寫該數被 2 整除後的商，例如 13 無法被 2 整除，因此下一個數就寫 6；3 無法被 2 整除，所以下一個就寫 1 等。最後 35×52 的答案就由各算式中乘數為奇數

13、3、1 左邊的三個數相加 140 ＋ 560 ＋ 1120 ＝ 1820 即為所求。那麼為何要如此算呢？由於 140x13 變成 280x6 的過程中少了 140；560x3 變成 1120x1 的時候少了 560，所以最後的 1120 必須加上 140 及 560 才能得到正確答案。我們再看一例：

28x31 ＝14×62=7×124=3×248=1×496 同理，28x31 的答案為 124 ＋ 248 ＋496 ＝ 868。當然，此種算法也可以做類似的延伸與推廣，例如計算 27x35，由於 27 是 3 的 3 次方，所以我們可以將被乘數逐次除以 3、乘數逐次乘以 3 來計算：27x35 ＝ 9x105 ＝ 3x315 ＝ 1x945 ＝945。同理，125x27 ＝ 25x135 ＝ 5x675＝ 1x3375 ＝ 3375。

貳、正文

一、你也曾面臨背不出九九乘法表的困境嗎？最近，日本出現一種「點線面」算法，只見他們隨手畫了幾條線、幾個點，正確答案輕鬆出爐，再也不用苦苦罰背！

是學生都心有戚戚焉，明明你每天背九九乘法表，驗算了三遍還是有出錯的可能。如果在大考中突然一個失神粗心，更是讓自己的排名瞬間從第一掉出十幾名，這種悔恨的痛苦相信你我都不想再經歷。

二、作法

題目是 23x12，接著影片中的主角

拿起筆和紙，如圖 1 先在紙上由左下到右上劃了 2 條和 3 條的平行線（代表被乘數 23），這兩組平行線的方向是斜的方向，且中間有段空隙；接著如圖 2 從左上到右下與原來線條方向交叉成 90 度的方向依序劃 1 條和 2 條平行線（代表乘數 12），然後用兩條虛線將平行線構成的方框切成三個部份如圖 3，這三個部份的總交點數（線與線的交點）就是該位數的數字（≧ 10 須進位），從右而左依序代表個位數、十位數與百位數等。

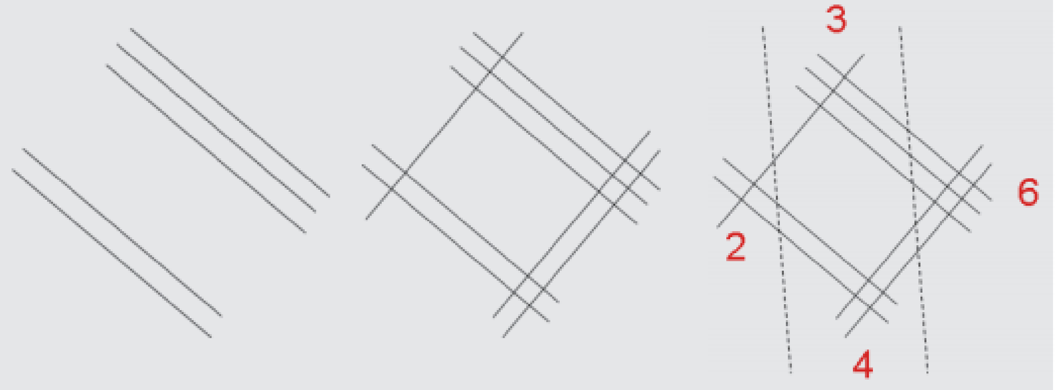


圖 1　圖 2　圖 3

我們可以發現圖 3 中，最右邊的交點數是 6，中間的交點數是 3 ＋ 4 ＝ 7，最左邊的交點數是 2，故 23x12 ＝ 276 ！一點也不賴吧！？

三、結語

筆者以國中的乘法公式來說明。23x12 ＝(20 ＋ 3)x(10 ＋ 2) ＝ 20x10 ＋ 20x2 ＋ 3x10 ＋ 3x2，由於展開後會出現四組算式，而這四組算式正好出現在圖 4 中的四個位置。每當筆者教完學生乘法公式後，就會秀上一段此種乘法，學生都驚呼不已，但最後只有少數學生可以想出其原理。至於這種遊戲式的乘法可否推廣？例如改成 23x 14 可否？我們可以試著用同樣的模式來處理，其中某區間的交點數若超過十則須進位，最後仍可得到正確的答案 322 ！(圖 5)

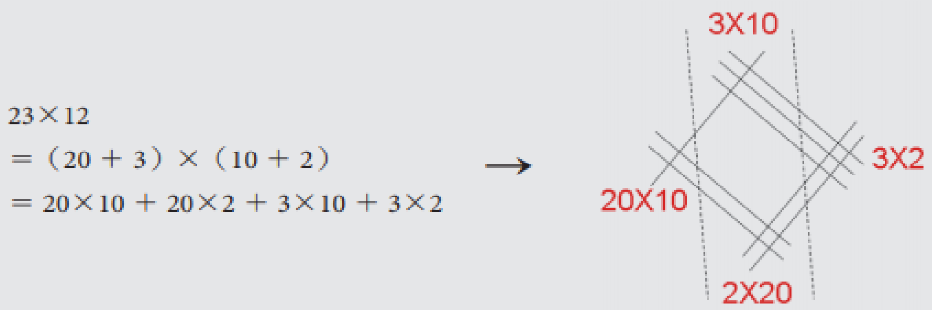


圖 4

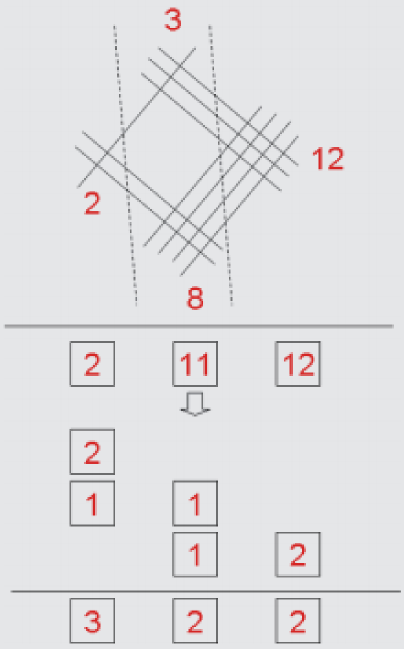


圖 5

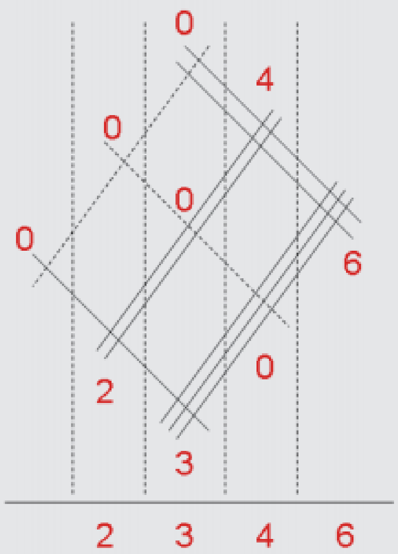
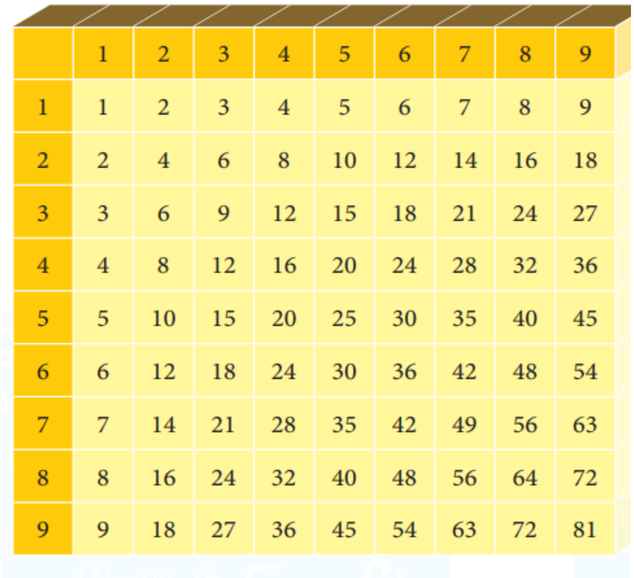


圖 6

那麼乘數或被乘數有 0 或是更大的數字怎麼辦？如 102x23 該怎麼做呢？為了畫圖方便，可以將算式視為 102x023，當成兩個三位數的數字相乘，凡遇到是 0 的數字就畫虛線，而虛線與虛線的交點以及虛線與實線的交點都視為 0。如此，還是可以用此方式「算」出答案是 2346 ！

四、九九乘法表的秘密

近來這個曾經陪伴我們成長的九九乘法表(見圖 7)再次成為數學界的焦點，原因是有人發現了乘法表中的奧秘，我們來瞧瞧到底有什麼秘密？



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 7

(一)自然數的立方和公式：

假設九九乘法表的橫軸與縱軸可以推廣至 n（見圖 8 ～ 10），我們來算算乘法表中的總和，按照圖 8 的算法為 $(1+2+\cdots+n)+2\times(1+2+\cdots+n)+3\times(1+2+\cdots+n)+\cdots+n\times(1+2+\cdots+n)=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n(n+1)}{2}$ 。

(二)按照圖 9 的算法為 $1+(2+4+2)+(3+6+9+6+9)+\cdots+(n+2n+3n+\cdots n^2+\cdots+3n+2n+n)=1+2\times(1+2+1)+3\times(1+2+3+2+1)+\cdots+n\times(1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1)=1+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+n\times n^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_1^n n^3=\frac{n(n+1)}{2}$ ，證畢。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖 9

	1	2	3	4	5	6	7	…	n
1	1	2	3	4	5	6	7	…	n
2	2	4	6	8	10	12	14	…	2n
3	3	6	9	12	15	18	21	…	3n
4	4	8	12	16	20	24	28	…	4n
5	5	10	15	20	25	30	35	…	5n
6	6	12	18	24	30	36	42	…	6n
7	7	14	21	28	35	42	49	…	7n
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	n	2n	3n	4n	5n	6n	7n	…	n^2

圖 10

參、結語

乘法看似容易，但沒想到可以衍生出 這麼多種的變化，藉由這些算術的發明我們可以回溯各國歷代算術的歷史進展。學習這些數學史，將有助於讓我們的思維更加寬廣。

肆、參考文獻

沒有九九表，外國人是這樣算乘法的

http://hk.crntt.com/crn-webapp/touch/detail.jsp?coluid=7&kindid=0&docid=104665109

九九乘法表不用背了！日本數學「畫線法」解救

http://www.epochtimes.com/b5/17/12/2/n9917366.htm

趣味乘法與九九乘法表的秘密

file:///C:/Users/user/Downloads/53-2-7_%E6%95%B8%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4_%E8%B6%A3%E5%91%B3%E4%B9%98%E6%B3%95%E8%88%87%E4%B9%9D%E4%B9%9D%E4%B9%98%E6%B3%95%E8%A1%A8%E7%9A%84%E7%A7%98%E5%AF%86_2551.pdf