探討勘根定理之應用

任教科別：數學科　作者：劉宗豪 老師

摘要

哇！好奇妙的解法，正當豁然開朗時，腦海中亦浮現另一個更有趣的問號，”那這個解是什麼呢？到底長得什麼模樣？請教一年級時授課的數學老師，似乎都得不到一個完整的答案，因此，這個疑問一直擱置在心中，直到小論文的開始，才有機會重新來探討這個解的形式。

壹、 前言

在高職數學中，三角函數與指數對數分別編排在高一上學期及下學期的課程裡，新的數學內容總是令人好奇，在學習完這些單元後，正對自身數學能力的提升而自信滿滿時，卻被一個高中數學問題完全擊潰。

這個問題的敘述如下：

方程式 $\log x = -x$ 會有多少個實根？

一開始完全沒有方向，毫無頭緒，只能胡亂地天馬行空思考，參考解答後，才發現原來它是利用圖解的方法來說明，解法及圖形如下：

令 $\begin{cases} y = -x \\ y = \log x \end{cases}$

等價於找出此二圖形的交點

因此方程式有一個實根

貳、 正文

針對這個問題，這次集合兩位同學的力量，試著去處理解的型式，我們透過紙本計算，網路，查書等等方式，幾乎都得到相同的答案，在毫無進展的情形下，便求助我們的指導老師，老師說，這是一個非線性方程式，以目前的高中數學知識，也許無法求出這個問題的解，但如果想知道此解的近似值，則可以尋找一些求解的數值方式，有了思考的方向，便開始展開我們的研究之旅。

一、牛頓法

假設 f 在 $[a,b]$ 是連續函數，並且 P 是其解，即 $f(P)=0$（$\left|P-\bar{x}\right|$ 是非常小）令 $\bar{x} \in [a,b]$ 是一個非常接近的值，使得 $f(\bar{x}) \neq 0$ 泰勒展開式得

$f(x) = f(\bar{x}) + f(x-\bar{x})f'(\bar{x}) + \dfrac{(x-\bar{x})^2}{2} f'(k)$，其中 k 介於 x 和 $\bar{x}$ 之間

因為 $f(P)=0$ 得 $0 = f(P) = f(\bar{x}) + (P-\bar{x})f'(\bar{x})\dfrac{(P-\bar{x})^2}{2} f''(k)$

由於 $\left|P-\bar{x}\right|$ 是非常小的，以至於 $(P-\bar{x})^2$ 亦非常的小，便將於省略而得以下結果

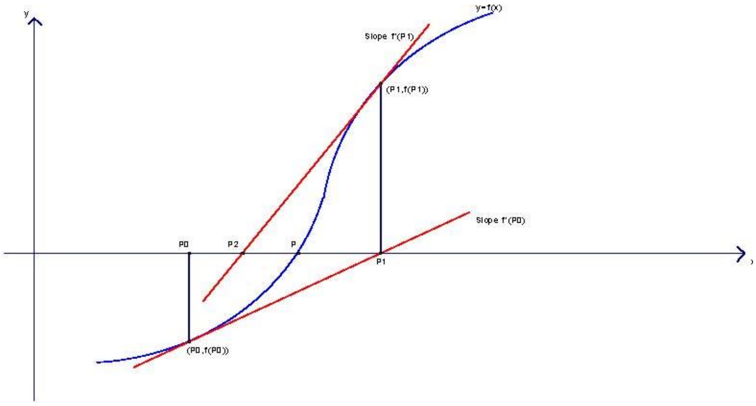
$$0 \approx f(\bar{x}) + (p-\bar{x}) f'(\bar{x}) \quad \Rightarrow p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

因此，我們就可以得到一個迭代的方式，如下：

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, n \geq 1$$

所以，當選定一個初始近似值時，透過這個迭代法，便能產生一迭代數列，這就是牛頓法。為了更瞭解牛頓法的數學定義，我們畫出一個函數圖形，利用圖解的方式，來說明這個數值法的數學抽象定義。

二、割線法



對於處理非線性問題，牛頓法是一個非常有用的方式，但它有二個主要的缺點，其中一個缺點，就是在每一次迭代過程中，都需要去計算 f 的導數。而這導數的運算又非常繁雜，為改善這問題，因此我們來介紹另一種方法：

由導數定義得

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

當 $x = P_{n-2}$ 時，我們可以得到

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

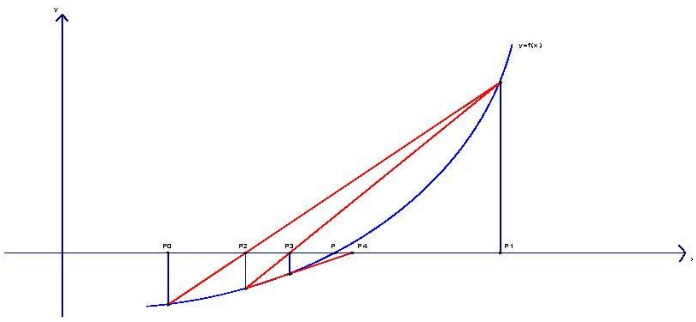
而從牛頓法得知

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \Rightarrow f'(p_{n-1}) = \frac{f(p_{n-1})}{p_{n-1} - p_n}$$

因此，結合上述兩個結果，便得到

$$\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}} = \frac{f(p_{n-1})}{p_{n-1} - p_n}$$

$$\Rightarrow p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$



三、勘根定理

在前面的內容我們提到，牛頓法有兩個缺點，另一個就是初始近似解的選取，因為的選定是必須非常接近，但在不知道真正解的情形下，使得這變得非常困難，而錯誤的選取，會讓產生的數列無法收斂，就得不到我們所預期的近似值。所以，我們就需要勘根定理來幫助我們設定初始近似解的範圍。

設 f 是一個連續函數，且 a 與 b 是兩相異實數，如果 $f(a)f(b)< 0$
則在 a 與 b 之間存在一實數 c，使得 $f(c)=0$
即方程式 $f(x)=0$ 至少有一實根 c，介於 a 與 b 之間

事實上，這個定理與對分法的理論非常相似。並且，對於勘根定理，我們也做了一些修正。在高中數學課程中，f 設定為實係數 n 次多項式，這裡將其推廣至連續函數亦可。

四、問題討論

對於方程式 $\log x=-x$，我們將其改寫成函數的型式，即 $f(x)=\log x+x$
但這個函數的微分是甚麼呢？
透過以下的定義就可得出結果：

定義一：
稱 ln 為自然對數函數，並且 $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$，$x> 0$
這個自然對數函數的定義域是正實數的集合

定義二：
ln 的反函數定義為 exp，稱做自然指數函數。因此：
$x=\exp y \Leftrightarrow y=\ln$

定義三：
假設 a 為異於 1 的正數，則
$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

藉由上述定義二及定義三，我們可以得到
$\because y=\log_e x \Leftrightarrow e^y=x \Leftrightarrow y=\ln x$
$\therefore \log_e x=\ln x$
若將其一般化，便能推得出常用對數的微分，如下：
令 $y=\log_a x \Rightarrow a^y=x$

$$\therefore \ln x = \ln a^y \Rightarrow \ln x = y \ln a \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\therefore (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x \log_e a}$$

因此，若對 $f(x)$ 微分就可得到

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x \log_e 10}$$

接下來，利用勘根定理，我們可以得知

當 $x = 0.1 \Rightarrow f(0.1) = 0.1 + \log 0.1 = 0.1 + \log 10^{-1} = 0.1 - 1 = 0.9 < 0$

當 $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + \log 1 = 1 + \log 10^0 = 1 + 0 = 1 > 0$

$f(x)$ 在 0.1 和 1 之間有一實根，所以，在具備這些條件後，如果選定初始解，就可以利用牛頓法及割線法來求近似解。

參、 結語

上述的問題，是我們在過程中所產生的疑慮，老師說，當中的幾個問題，其背後的理論基礎，事實上是非常高深的，以我們現階段的知識，實在無法處理這樣的問題，但老師還是很肯定我們的表現，因為研究過程中最可貴的，就是培養發掘問題的能力，這樣我們才能不斷地進步，去解決真正的核心問題。

在使用勘根定理時，我們發現，在解決這些設計過的問題時，只要找原點附近的幾個整數檢驗即可，但如果像以下多項式：

$$x^3 - 91x^2 + 2591x - 22661 = 0$$

其解分別為 17，31，43，假若利用整係數一次因式定理，22661 卻不易分解；勘根定理最快也要檢驗十幾次，其計算數值又龐大，才能得到第一個解；而牛頓法或割線法，則無從設定初始解，不知道有沒有其他合適的方法，來處理這類的問題？

肆、參考文獻

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2001). *Numerical analysis*. U.S.A., CA:Brooks/Cole.

林福來(主編)(2008)。普通高級中學數學第一冊。台南市：南一書局。

Varberg, D., & Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2000). *Calculus*. U.S.A.,NJ:Pernice-Hall.

洪維恩(2006)。Matlab7 程式設計。台北市：旗標出版社。