貝氏定理淺談

任教科別：數學科　作者：劉宗豪

摘要

「決勝二十一點」電影中教授發問有關「山羊與汽車」得大獎的機率問題，男主角回答換門得大獎的機率比較大，就人們的直觀上總認為這想法和常態有所差異，進而對這個機率問題產生好奇。

日常生活中，人們時常會遇到許多需要抉擇的時刻，大家往往都會選擇對於自己能產生最大利益的那個選項；但人們其實並不知道哪一個才具有最大利益，而僅僅出於憑感覺做判斷。由於高二下學期學生會學到了機率這個章節，如何利用機率的計算得出哪個事件能獲得最大利益，從中解決許多生活中的抉擇問題。

壹、前言

我們日常生活中常見到的小遊戲中，或多或少都離不開一個數學上相當重要的概念—機率。事實上，機率的概念最初是從觀察賭博中發展出來的，而這就是將單純只是靠運氣的遊戲衍伸到一個數學上領域的研究，而將普通的機運科學化的過程。

談到機率，相信大部分對機率有所涉獵的人們或許都看過一個歷史上相 當著名的問題——Monty Halls 三門問題。在這份作品中，我們將藉由三門問題的探討，推算出贏得獎勵的最佳策略，進而歸納出其規律。

加以偶然在《科學月刊》上看到〈轎車與山羊〉這篇文章，其論點：在已知某條件下個別事件的機率並不均等，顛覆了原本的觀念對於選擇的假設，使人欲深入 其中了解及探討其箇中奧妙。

貳、正文

一、貝氏定理的起源

貝氏定理是一種統計學。在十八世紀後期，貝氏（Reverend Thomas Bayes, 1702-61）在玩弄著條件機率的公式時，忽然有個驚人的發現－這些公 式都是內部對稱的。而所謂的貝氏定理就是機率論中的一個結論，它跟隨機變數的條件機率以及邊緣機率分布有關。

二、三門問題原始命題：

知名的三門問題是來自一個電視節目上，主持人 Monty Hall 所主持的一個獎品遊戲。節目中給挑戰者有 3 扇門可以選擇，接著主持人會將其中一扇確定不會中獎的門刪除，接著提供挑戰者是否更換門的權利，問題就是更換門前後的機率分別是多少？

(一)有 3 扇門，1 個獎品

1. 如果我們選擇不換門，則中獎機率為 1/3
2. 如果我們選擇換門，則中獎機率為 1/3＊0+2/3＊1=2/3

（有 1/3 的機率選擇到正確的門，但是因為換了門，所以一定會變成沒有中獎。2/3 的機率選到沒有獎品的門，然後因為 2 扇沒有獎品的門都被移除了，因此一定會中獎。）

⇒比較換門和不換門的機率差

(二)貝氏定理公式

通常沒有多想會認為換與不換的機率是一樣的，但利用貝氏定理公式，可以知道這次的事件 A 是「１號門有獎金」，而事件 B 就是「主持人把２號門打開」。

P(A)=1/3：P(A)就是１號門有獎金的機率，當然是 1/3。

P(B|A)=1/2：如果１號門有獎金，主持人就要在２號和３號之間打開一扇，所以 P(B|A)=1/2。

P(B)=1/2：這是因為這有兩個可能性，第一個可能性是１號門有獎金，這樣「主持人把２號門打開」的可能性就是 P(B|A)，也就是 1/2，第二個可能性是３號門有獎金，這樣主持人只可打開２號門，所以機率是 1，P(B)=(1/2)(1/3)+(1)(1/3)=1/2。用公式就以可以計出 P(A|B)=P(１號門有獎金|主持人把２號門打開)=(1/2＊1/3)÷1/2 所以如果堅持選擇１號門，贏得獎金的機率就只有 1/3，但選擇轉到３號門，勝出機率就會是 2/3，由此可知選擇轉換可使中獎的機率加倍。

三、生活中實例應用

在流行病學的領域中，關於利用機率理論來計算某種疾病檢驗所帶來的偽陽性比率，也有許多類似關於機率解讀的問題。說明如下：

1.符號

D：真正有病(disease)　　　　　D'：沒病(no disease)

T+：檢驗結果為陽性(positive)　　T-：檢驗結果為陰(negative)

2.名詞解釋

(1)盛行率（Prevalence P(D)）在某時間點上罹患某病的比例。

(2)敏感度（Sensitivity P(T+|D)）有病的人檢驗結果為陽性的機率。

(3)特異度（Specificity P(T-|D')）沒病的人檢驗結果為陰性的機率。

(4)偽陽性（False Positive P(T+|D')）沒病的人被誤檢驗為陽性的機率。

(5)偽陰性（False Negative P(T-|D)）有病的人被誤檢驗為陰性的機率。

3.關心的問題

若檢驗結果呈陽性(T+)時，實際上此人罹病的機率 P(D|T+)為何?

若檢驗結果呈陰性(T-)時，實際上此人未罹病的機率 P(D'|T-)為何?

假設根據某段時間的研究報告，一種罕見疾病在某地區每 10 萬人中有 8 人(盛行率)罹患此病，且在醫學上已有方法可以檢驗此種疾病，但不是百分百有效，對於已經罹患此病的人有 98%(敏感度)的檢驗結果呈現陽性反應，而對於未染病的人也有 1.6%的機率（偽陽性)檢驗出罹患此病。已知某人剛做完此疾病的檢驗後呈陽性反應，請問此人真的罹患此罕見疾病的機率有多大？

解：

由 P(D)=8/100000，P(T+|D)=98/100，P(T+|D')=1.6/100

P(T+)=P(D)P(T+|D)+P(D')P(T+|D')

=8/10000＊98/100+(1-8/10000)＊1.6/100=0.01607712

所求 P(D|T+)=0.0000784/0.01607712 接近 0.00488

可知此人真的罹患此罕見疾病的機率約為 0.00488，意即每 100000 人做此疾病檢驗呈陽性反應，約有 488 人真正罹患此病。

這樣的結果乍看之下著實令人意外，在高敏感度的檢驗之下，呈陽性反應者其真正罹病的機率才只有 0.00488。再換一個角度來看,檢驗前， 一個人罹病的機率為 0.00008(每十萬人中有 8 人)，如果檢驗後呈陽性反應，則罹病機率升 高為 0.00488(每十萬人中有 488 人)，比原先高了約 61 倍，這未嘗不是一個警訊，所以醫生通常會建議再做一次更精密的檢查，而這也正是數字 0.00488 的意義之一。

有關機率的解讀，實在應該要注意掌握了多少相關的資訊。然後，貝氏定理背後的概念，並不是只估算一次事後機率就好了，而是說，只要有新的證據(資訊)出現，我們就應該不斷的修正。

叁、結語

藉由這次的研究，可以知道貝氏定理的起源與定義，而在生活中也常需要利 用貝氏定理進行計算，像醫學和統計學都會使用該定理計算其機率，在醫學方面， 因為可能驗出偽陽性和偽陰性，因此利用貝氏定理，可以算出是否真正罹患疾病 的機率。

貝氏定理不只可以在醫學方面求機率，還可以應用在其他生活問題中，例如：三扇門問題、測謊機、抽籤問題…等等，透過這次的小論文研究，進而整理出這篇與貝氏定理相關應用的小論文。藉由研究三門問題以及撲克牌遊戲中各種選擇情況、遭遇條件及限制，計算並 觀察各種不同的狀況會造成的結果，進而推論出贏得遊戲的最佳方法。且可在實 際的狀況下將上課所學到的機率、排列組合……等等化為能在生活上用到的工具, 這也正是學數學最重要的意義。

肆、參考文獻

一、蘇俊鴻　貝葉斯和貝氏定理(1)　科學 Online（網站）

二、黄文璋　機率應用不易　數學傳播 34 卷 1 期 民 99 年 3 月

三、黃提源　機率論　協進圖書

四、薩爾斯伯格(David Salaburg)著 葉偉文譯　統計改變了世界