

# 貼磚藝術~密鋪圖形的探討

李芳俞

## 壹、前言

密鋪是指用形狀、大小完全相同的幾種或幾十種平面圖形進行拼接，彼此之間不留空隙、不重疊地鋪成一片，又稱做平面圖形的鑲嵌。密鋪平面的圖案往往引人入勝，有種從有限延伸至無限平面的錯覺。使用多邊形密鋪創造伊斯蘭幾何圖案可以追溯到這一裝飾傳統的形成時期，最早被廣泛使用的系統是正多邊形的密鋪。古代工匠們利用正三角形、正方形、正六邊形和正十二邊形作為重複的模組，並在其上應用圖案線，構造出各種各樣的設計，其數量之多令人驚訝。然而，簡單帶來的代價就是單調且缺乏美感。如果我們使用多種正多邊形嘗試密鋪，情況會立即變得有趣得多。

## 貳、正文

### 一、正多邊形的密鋪

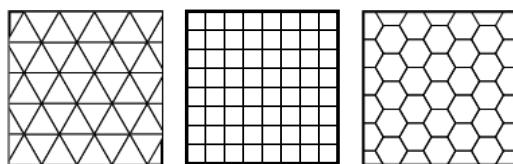
我們都知道，鋪地時要把地面鋪滿，地磚與瓷磚之間就能留有空隙。如果用的地磚是正方形，它的每個角都是直角，那麼4個正方形拼在一起，在公共頂點處的4個角，正好拼成一個360度的周角。六邊形的每個角都是120度，3個正六邊

形

拼在一起時，在公共頂點上的3個角度數的和正好也是360度。除了正方形、長方形以外，正三角形也能把地面密鋪。因為正三角形的每個內角都是60度，6個正

三

角形拼在一起時，在公共頂點處的6個角的度數和正好是360度。正因為正方形、正六邊形拼合以後，在公共頂點上幾個角度數的和正好是360度，這就保證了能把地面密鋪，而且還比較美觀。



三種由正多邊形組成的密鋪圖形

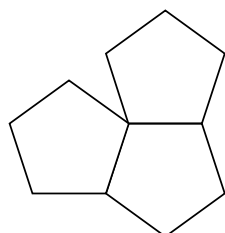
因為只有正三角形、正方形、正六邊形的內角的整數倍為 $360^\circ$ ，因此正多邊

形

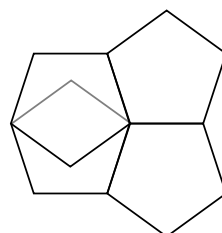
中僅此三者可以密鋪。圓形不能密鋪，但正三角形和等腰梯形、直角梯形能密鋪。對於任何四邊形，由於其四隻角加起來會是 $360^\circ$ ，只要交錯排列就能夠密鋪

平

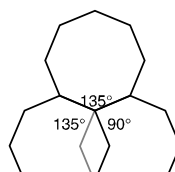
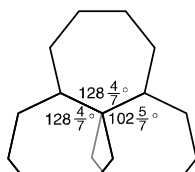
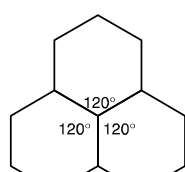
面。



三個正五邊形



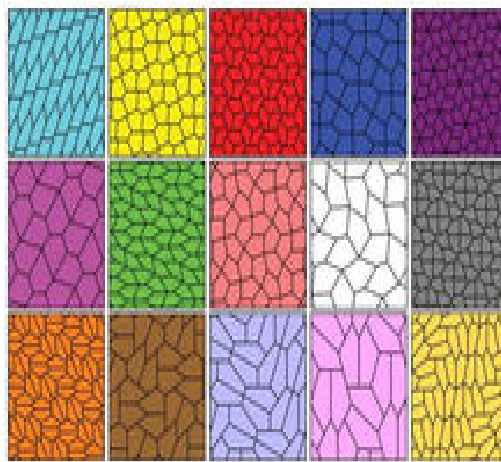
四個正五邊形



等），  
而接受任何凸多邊形（每一隻角均小於  $180^\circ$ ），事情就開始變得有趣：凸七邊形仍然無法密鋪平面，多於七條邊的凸多邊形也不行，但有些凸五邊形可以。

## 二、可單獨密鋪的圖形

- (一)任意三角形、任意凸四邊形都可以密鋪
- (二)正三角形、正四邊形、正六邊形可以單獨用於平移密鋪。
- (三)三對對應邊平行的六邊形可以單獨密鋪。
- (四)目前僅發現十五類五邊形能密鋪。

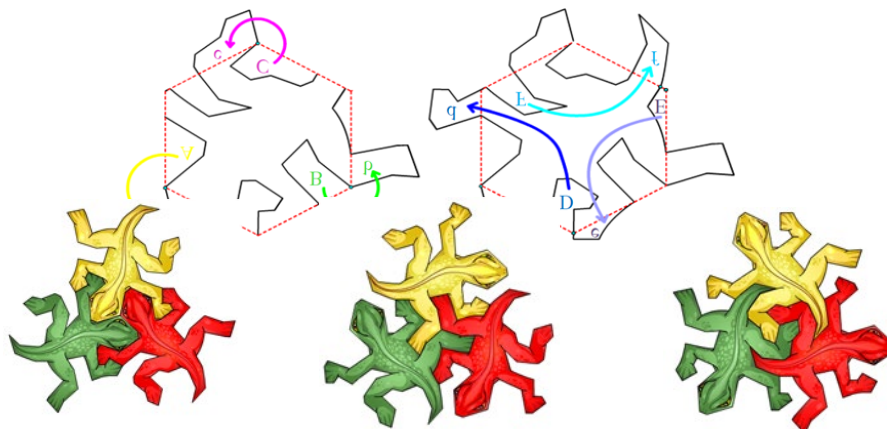


## 三、密鋪的例子

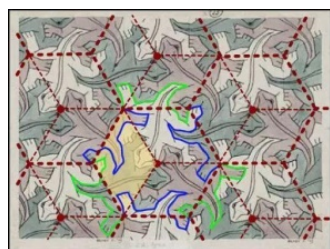
貼磚技術在文明史上一定是起源於很早的時候，當人類開始建造房屋時，就會用石頭來鋪砌地面和牆壁，當人類開始選取各種形狀和顏色的石頭來做出漂亮的設計時，就可以認為貼磚是一種藝術了。伊斯蘭藝術家的作品比任何其他文化遺產都更能揭示幾何固有的視覺美，它們從幾何學中汲取靈感，產生了豐富的美學創新。

這方面最著名的早期研究者當數埃舍爾，他對一種他稱為 metamorphoses（變形）的形狀特別感興趣。在平面密鋪圖形中利用這些基本的圖案，用幾何學中的反射、平滑反射、變換和旋轉來獲得更多的變化圖案。他也精心地將這些基本圖案扭曲變形為動物、鳥和其他的形狀。這些改變要通過三次、四次甚至六次的對稱，最後形成各種驚人美麗的平面密鋪。

在數學上，我們可以用平移、旋轉與對稱及加減遞補的方式來詮釋埃舍爾的繪圖方法，讓我們來欣賞一幅艾薛爾在密鋪平面上的數學藝術〈蜥蜴〉；以正六邊形當骨架，從正六邊形內部剪下六小塊，貼到外部適當的位置，以拼出蜥蜴的外形，其中頭及兩隻後腳是透過固定點順時針旋轉而成，而尾巴及兩隻前腳是透過旋轉之後再移位補上的。



下圖是艾薛爾以三種顏色不同但形狀一樣的蜥蜴，讓牠們相親相愛的團聚在一起，這都要歸功於以正六邊形密鋪整個平面的一個性質「每個正六邊形的頂點都恰被三個正六邊形圍繞著」，從石墨烯或蜂巢正六邊形結構圖就可以看出來。很多玩具公司將艾薛爾密鋪平面的圖片設計成拼圖遊戲，融合美感形式與數理概念的雙重特性。



蜥蜴



飛魚

除了從正六邊形出發外，埃舍爾的許多鑲嵌圖案是從正方形與正三角形演化而來的，例如上圖〈飛魚〉就是從正三角形加工拼湊而成，而〈鴨子〉則是由正方形透過左右及上下各一次的加減遞補出來的。

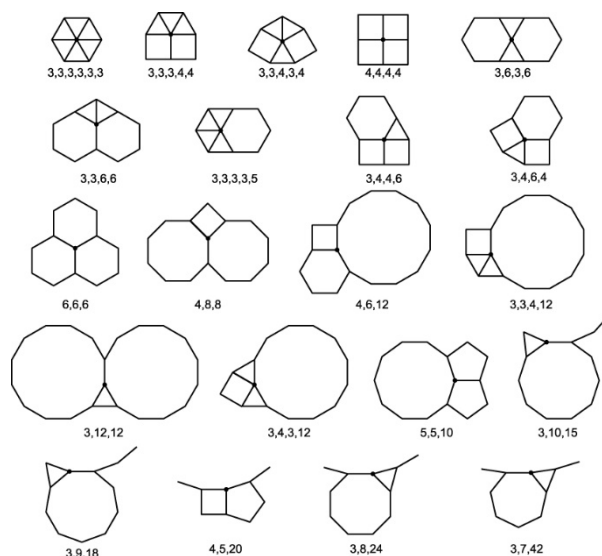
#### 四、課堂上的應用

教師可安排學生以小組形式用多於一種的正多邊形密鋪平面。教師可要求學生盡量畫出各種組合，並與學生一起討論以下條件：

- (一)不可多於六個多邊形(等邊三角形的六個角已有 $360^\circ$ )
- (二)不可少於三個多邊形(正多邊形的一個角小於 $180^\circ$ )
- (三)所用多邊形不可多於三種(一個三角形、一個正方形和一個五邊形的角和 $258^\circ$ )
- (四)如果使用四個多邊形，則其中的兩個必須屬於同一種類
- (五)如果使用五個多邊形，其組合必須是 $2+2+1$  或  $3+1+1$

教師可介紹  $x, y, z$  系統代表以邊數為  $x, y$  和  $z$  的多邊形砌成的密鋪圖案。例如， $3, 3, 4, 12$  代表密鋪中的兩個三角形，一個正方形和一個十二邊形。學生須分辨  $3, 3, 4, 12$  和  $3, 4, 3, 12$  是兩種不同類型的密鋪。教師可要求

生找出所有可能的正多邊形密鋪。



### 叁、結論

平面密鋪也稱為鑲嵌。所謂平平面密鋪就是規則的平面分割。用一些形狀大小完全的一種或幾種平面圖形進行拼接，彼此之間不留空隙、不重疊地把平面的一部分完全覆蓋。一般來說，構成一個平面密鋪圖形的基本單元是多邊形或類似的常規形狀，例如經常在地板上使用的方瓦（地板磚）。

正三角形磁磚會讓人產生有稜有角的感受，比較適合當人行道上的地磚，可以達到提醒路人小心的目的；正方形磁磚給人有四平八穩的氣氛，適宜當居家室內的磁磚，隨時散發出居住舒適安穩的氛圍；而正六邊形磁磚讓人有圓融肚量大的感受，是寺院廟宇地磚的不二選擇，充分散播出人生的圓融與和諧。

從上面的例子，我們可以知道：埃舍爾透過平移、旋轉與對稱的加減拼湊方法，將一個簡單可以填滿平面的幾何圖形，透過他豐富的想像力及熟練的手畫技巧，幻化為生動、有趣且一樣可以密鋪平面的數學美學圖案。

密鋪理論的應用很多。建築設計中的各種圖案，堆放物體時如何最大地利用空間（三維密鋪），晶體學中如何優化晶體結構等等。

### 肆、引註資料

一、知乎：如何看待美國數學家發現可無縫密鋪平面的五邊形？

(<https://www.zhihu.com/question/34916541/answer/60644653>)

二、維基百科（2014），密鋪。取自 <https://goo.gl/R2EqS9>。