

蒙提霍爾問題

呂倫仰

壹、前言

有兩隻羊和一輛車，當參賽者和蒙提一起面對大門時，他有三分之一的機會選到打開來是一輛車的大門，但就像前面提到的，《讓我們做個交易》有一點變化，這就是為什麼這個節目和主持人能在機率文獻上不朽的原因。當參賽者選了一扇門之後，蒙提會打開參賽者沒有選的兩扇門中的一扇，後面永遠是一隻羊。這時蒙提會問參賽者要不要改變心意，從他原先選的那扇關著的門，轉換到剩下的另一扇關著的門。

貳、正文

一、問題

舉例來說，假設參賽者選擇一號門，蒙提會打開三號門，就會看到一隻活生生的羊站在台上。其他一號門及二號門仍然關著。如果大獎是在一號門後，參賽者就贏了；如果大獎是在二號門後，參賽者就輸了。這時蒙提會轉向參賽者，問他要不要改變心意，從一號門改選二號門。要記得這兩扇門都還是關著，參賽者唯一得到的新訊息是，他沒選的兩扇門中有一扇後面是一隻羊。他應該換嗎？

二、分析理論

應該。參賽者如果堅持原來的選擇，有三分之一的機會贏得大獎，轉換選擇則有三分之二的機會。這個答案乍看似乎完全不合直覺，看起來不論參賽者如何選擇，都只有三分之一的機會獲勝。有三扇關著的門，一開始每一扇門都各有三分之一的機會迎向大獎，從一扇關著的門改選另一扇關著的門，會有什麼差別呢？答案在於，蒙提知道每扇門的後面是什麼。如果參賽者選擇一號門，門後是一輛車，蒙提可以打開二號或三號門，後面都是一隻羊。

如果參賽者選擇一號門，車子是在二號門後，蒙提就會打開三號門。如果參賽者選擇二號門，車子是在三號門後，蒙提就會打開二號門。在一扇門打開後改變選擇，參賽者就有了兩個選項而非只有一個選項的好處。在此會用三種不同方式說服你，這樣的分析是正確的。

三、分析方式

第一種方式是經驗論。二〇〇八年《紐約時報》專欄作家約翰·提爾尼寫了一篇

篇

關於蒙提霍爾現象的文章。《紐約時報》建立一個互動式的單元，讓讀者可以自己玩這個遊戲，包括決定要不要轉換選擇（甚至還有小羊和車子從門後蹦出）。你在第一次選擇後又改選而成功的次數，跟你沒有改選而成功的次數，會記錄下來並做比較。你可以試著玩玩看。（補充說明：你可以在下面的網址玩這個遊戲：http://www.nytimes.com/2008/04/08/science/08monty.html?_r=2&oref=slogin&oref=slogin）

。

我付錢讓我女兒去玩一百次，每一次都轉換選擇。我付錢給她哥哥去玩一百次，每次都不換。轉換的人贏了七十二次，沒換的贏了三十三次。兩個人都得到兩美元做

為出力的報酬。

《讓我們做個交易》節目的數據有相同結果，根據《醉漢走路：機率如何左右你我的命運和機會》一書的作者雷納·曼羅迪諾的說法，轉換選擇的參賽者贏的次數是未轉換者的兩倍。

第二種解釋涉及直覺。假設遊戲規則稍微修改，參賽者一開始仍比照原來方式，在一號門、二號門、三號門中選擇一扇；但是接下來在任何一扇門打開出現一隻羊之前，蒙提說：「你願不願意放棄原來的選擇，改選那兩扇你沒選擇的門？」

也

就是說，如果你選了一號門，你可以不要，改選二號門與三號門；如果你選了三號門，你可以改選一號門與二號門；以此類推。

這並非是一個特別難的決定，你顯然應該放棄而改選另外兩扇門，那會讓你贏得大獎的機會從三分之一增加到三分之二。這就來到有趣的部分了：這正是蒙提·霍爾打開有羊那一扇門之後所讓你做的事。基本的認知是，如果你可以選擇兩扇

門，

無論如何兩扇中都有一扇後面是羊，當他問你是否要改變心意之前就打開一扇後面是羊的門，他等於是在幫你一個大忙！他其實是在說：「有三分之二的機會是車子在你沒選的那兩扇門之一的後面，你瞧瞧，不是我打開的這一扇門！」

你這樣想想，如果你選一號門，然後蒙提給你一個機會改選二號與三號兩扇

門。

你接受了，放棄一扇門，得到另兩扇門，意思是你可以合理預期有三分之二的機會贏得車子。此時如果蒙提打開三號門——也就是你改選的兩扇門之一——然後出現一

隻

羊怎麼辦？你會不會對自己的選擇比較沒把握了？當然不會。如果車子是在三號門的後面，他就會打開二號門了！他並沒有給你任何新訊息。

當遊戲正常進行時，蒙提其實是讓你在最先選擇的「那扇門」與「其他兩扇門」

之間選擇，只有兩者之一後面會有車子。當他打開一扇門出現一隻羊，他只是出自好意讓你知道其他兩扇門中，有哪一扇門後沒車子。你在下面兩個情況下贏得大獎的機率是相同的：

① 選擇一號門，而在任何一扇門打開前，同意改選二號門與三號門。

② 選擇一號門，而在蒙提打開三號門出現一隻羊後改選二號門（

或在蒙提打開二號門出現一隻羊後改選三號門）。

在前述兩個情況下，改變選擇都會給你擁有兩扇門而非只有一扇門的好處，因此你可以讓贏得大獎的機會加倍，從三分之一增加到三分之二。

第三種解釋方式，是同一種基本直覺的極端版。假設蒙提·霍爾讓你從一百扇門而不是三扇門之間選擇。假設你選四十七號門，在你選了之後，他打開九十八扇其他的門，後面出現的都是羊，現在只有兩扇關著的門：四十七號門（

你最初的選擇）

與另一扇假設是六十一號門好了。你該換嗎？

之

選

六十一

答案是：你當然應該換。有百分之九十九的機會車子在你原先沒選的那些門

一的後面。蒙提幫你一個大忙，打開九十八扇你沒有選擇的門，他知道它們後面都不是車子。你最初的選擇（四十七號門）是正確的可能性只有百分之一，你最初的

選擇有百分之九十九的機會是錯的，如果你最初的選擇錯誤，那麼車子就在另一扇門（六十一號門）的後面。如果你希望在一百次裡能贏得九十九次，就應該改選

號門。

簡言之，如果你有機會參加《讓我們做個交易》節目，當蒙提·霍爾給你改變選擇的機會時，你絕對應該改選另一扇門。從這裡我們習得一個更廣泛應用的教訓，就是你在機率方面的直覺有時會指引你走錯方向。

四、數學推導公式

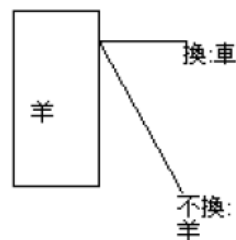
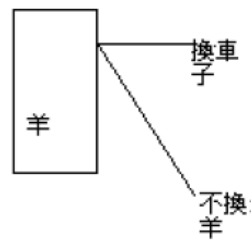
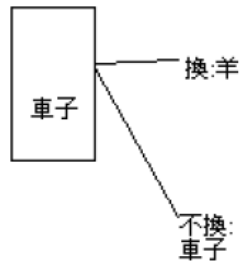
很明顯地，我們可以知道一開始就選中汽車的機率是 $\frac{1}{3}$ ，而沒有選中汽車的機率是 $\frac{2}{3}$ 。從這個結論來反思整個問題，當主持人打開其中一扇有羊的門後，只

剩一扇有車和一扇有羊的門。而因為一開始就選中汽車的機率僅僅只有 $\frac{1}{3}$ ，而沒

選

中的機率卻有 $\frac{2}{3}$ ，所以當然要換門。

討論如何解析其機率，我們使用機率的基礎 — 樹狀圖。



如圖，不難發現狀況有兩種。

第一種：原本就選中車子，換門會中羊，而不換門中車子。

第二種：原本選中羊，換門會中車子，而不換門會中羊。

由此可知，換的狀況有三種，有兩種情況可中車，故換門會中獎的機率是

$$\frac{2}{3}。$$

而不換的情形有三種，有一種會中獎，故不換門中獎的機率是 $\frac{1}{3}$ 。

由此可知，換門的中獎機率較大。

由此，我們可以列一個算式：

因選到的第一扇門的機率為 $\frac{1}{3}$ ，而換門中獎的機率是零。

選到第二扇門的機率也是 $\frac{1}{3}$ ，而換門中獎的機率是 1。

選到第三扇門的機率也是 $\frac{1}{3}$ ，而換門中獎的機率是 1。

故換門會中獎的機率是 $\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \times (0 + 1 + 1) = \frac{2}{3}$ 。

而不換門中獎的機率顯而易見就是 $\frac{1}{3} \times (1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$ 。

(也就是一開始就選到車子的機率。)

肆、引註資料

一、資料來源：聰明學統計的13又 $\frac{1}{2}$ 堂課

二、資料來源：換與不換的兩難 — 蒙提霍爾問題延伸探討