

# 撲克牌機率問題

任教科別：數學科 作者：李芳俞 老師

## 摘要

在教學過程中，教師如果能夠採用多元活潑的教學方式和多樣豐富的教學內容，必能激發學生內在的學習興趣。換言之，也就是教師在教學過程中要採活化教材、活潑教學的方式，例如：運用資訊科技融入教學、使用多元評量的方式，或融合遊戲的教學活動等。其實在學生日常生活的遊戲中，都隱含著許多的數學概念，以常見的撲克牌遊戲而言，就可以協助教師營造一個有趣、豐富的課室情境，也能透過非例行性的活動發展最佳策略，並引導學生建立機率和統計等概念。

撲克牌讓數學變好玩了，將撲克牌融入數學課程中，不只強化了學生在課程中的互助互動、腦力激盪、內涵本質的充分發展，更利用撲克牌遊戲強化學生學習的動力。學生需要能「連結生活情境和數學概念」，並加以轉化，才能夠正確答題，因此課程中融入「生活中的數學」已成一大重點。

## 壹、前言

撲克牌可以說是風靡全球，且攜帶方便，不少旅客以撲克牌遊戲，作為長途車程的玩意。當你拿著撲克牌的時候，你可知道是拿著過千年的產品。據說，撲克牌大約在 969 年出現。其後，由馬可·勃羅父子傳入歐洲。而撲克牌中的 4 種圖案：黑桃、梅花、方塊和紅心，亦各具含意。流行的說法有兩種。其一是黑桃代表軍人，梅花代表農業，方塊代表工匠使用的磚塊，紅心代表牧師。另一傳說，4 種圖按是源自歐洲古代占卜器物。黑桃代表橄欖葉，象徵和平。梅花代表三葉草，象徵幸運。方塊代表鑽石，象徵財富。紅心則象徵智慧和愛情。

一副公正的撲克牌 (Poker) 共有四種花色 (黑桃、紅心、方塊與梅花)，各種花色包含 13 種數字 (2、3、…、10、J、Q、K、A) 各一張，總共 52 張，有時會再加上 2 張鬼牌。而撲克牌相關遊戲種類相當多，其中，一種常見的遊戲方式是每人發五張牌，依據牌面花色與點數所形成的牌型來決定勝負 (即一般人口中所謂的梭哈)。

遊戲當中，各類牌型的勝負比較如下：同花順 > 鐵隻 > 葫蘆 > 同花 > 順 > 三條 > 兩對 > 一對 > 其它 (亂牌)。當然在同一牌型之下，必需依據相對應的數字大小來作比較。數字由大至小依序為：A>K>Q>J>10>9>…>2；而在某些組合中 A 也可被視為 1。我們可以在課堂上藉由各類牌型的機率計算，讓學生對古典機率與組合的概念更有感的學習。

## 貳、正文

### 一、機率起源

法國有一位擲骰子遊戲的貴族叫德·梅雷，1654 年，他向數學家帕斯卡請教了「分賭注問題」。帕斯卡與當時法國數學家費馬建立了聯繫。過程中，帕斯卡和費馬一邊親自做賭博實驗，一邊仔細分析計算賭博中出現的各種問題，終於完整地解決了「分賭注問題」。

### 二、機率定義

將機率的觀念以相同的可能性來解釋。假設所有試驗結果之機率相等，若有  $n$  個試驗結果，則平均分配機率  $1/n$  至每一試驗結果。

### 三、撲克牌介紹

(一)常用五張撲克機率計算：

所有五張牌的組合，按以下順序，由大至小排列分為不同牌型：

牌型(別名)	英文名	說明	範例				
同花順	Straight Flush	五張同一花色且順連的牌。	10♠	J♠	Q♠	K♠	A♠
鐵支(四條，鐵扇，炸彈)	Four of a Kind	有四張同一點數的牌。	4♠	4♥	4♣	4♦	9♥
葫蘆(夫佬，富而)	Full house	三張同一點數的牌，加一對	8♠	8♣	8♦	K♠	K♥

好施，三帶一對)		其他點數的牌。					
同花(花，滿堂紅)	Flush	五張同一花色的牌。	3♠	4♠	8♠	J♠	K♠
順子(蛇)	Straight	五張順連的牌。A 不能在中間	A♣	2♣	3♥	4♦	5♠
三條	Three of a kind	有三張同一點數的牌。	7♠	7♥	7♦	2♣	K♦
兩對(Two 啤，滔啤，Two 胚，兔胚)	Two Pairs	有兩張相同點數的牌，加另外兩張相同點數的牌。	8♠	8♦	A♥	A♣	Q♠
對子(啤，胚)	One Pair	有兩張相同點數的牌。	9♠	9♥	4♣	J♠	A♥
散牌(高牌，烏龍，魯蛋)	High card	不能排成以上組合的牌，以點數決定大小。	3♠	6♥	9♦	K♠	A♣

### 1. 同花順 (straight flush)

5 張牌的花色相同，且數字連號，由大到小包含共 10 種可能的連號(順)。加上共有四種花色，因此，所有同花順共有 40 種。出現同花順的機率便是：

$$\frac{40}{C_5^{52}} \approx 0.000015, \text{ 在現實生活中，出現這種牌的概率比電影或電視劇里所描述的}$$

的低得多。在真實賭局中要打 6 萬~7 萬把牌才能遇上一把「同花順」。最大的同花順 AKQJ10 又被稱為同花大順，它的組合數僅為 4，

$$\text{機率更是只有 } \frac{4}{C_5^{52}} \approx .0000015 !$$

### 2. 鐵支 (four of a kind)

5 張牌當中，有四張數字相同。先從 13 個數字中選出 1 個，4 種花色的數字其中一種全選，再從其它 12 個數字中選出 1 個，接著並從 4 種花色剩餘的數字中再選一張。鐵支組合數共有： $C_1^{13} C_1^{12} C_4^4 C_1^4 = 624$  種。出現機率：

$$\frac{624}{C_5^{52}} \approx 0.00024。$$

### 3. 葫蘆 (full house)

5 張牌當中，有三張數字相同，另兩張也相同。先從 13 個數字中選出 1 個，

從 4 種花色的數字 恰選三張，再從其它 12 個數字中選出 1 個，接著並從 4 種花色的數字 恰選二張。如此，葫蘆組合數共有： $C_1^{13}C_1^{12}C_3^4C_2^4=3,744$  種。出現機率

$$: \frac{3744}{C_5^{52}} \approx 0.00144。$$

#### 4. 同花 (flush)

5 張牌的花色相同，需扣除前述 40 種同花順的情況。其組合數：先從四種花色中選出一種，再從該花色的 13 個數字中任選 5 個，且計算時必需扣掉 40 種同花順，可計算出所有的同花共有： $C_1^4C_5^{13} - 40=5,108$  種。其出現的機率為：

$$\frac{5108}{C_5^{52}} \approx 0.00197。$$

#### 5. 順 (straight)

5 張牌需連號，但花色不全相同，需扣除前述 40 種同花順的情況。共有 10 種連號方式，接著考慮連號當中的 5 個數字，從 4 種花色的數字各選一張。順的組合數有  $10C_1^4C_1^4C_1^4C_1^4 - 40=10,200$  種。出現機率為：

$$\frac{10200}{C_5^{52}} \approx 0.00392。$$

#### 6. 三條 (three of a kind)

5 張牌當中，有三張數字相同，另兩張則都不相同。其組合數：先從 13 個數字中選出 1 個，接著從 4 種花色的數字選三張，再從其它 12 個數字中選出 2 個，從 4 種花色的數字 選一張，最後，從 4 種花色數字 選一張： $C_1^{13}C_2^{12}C_3^4C_1^4C_1^4=4,992$  。

$$其機率為：\frac{4992}{C_5^{52}} \approx 0.02113。$$

#### 7. 兩對 (two pairs)

5 張牌當中，包含兩組各兩張的相同數字，另一張則不同。其組合數：先從 13 個數字中選出 2 個數字，接著從 4 種花色的數字選二張，再從其它 11 個數字中選出 1 個，4 種花色的數字 選二張，最後從 4 種花色的數字 恰選一張，其組合數共有：

$$C_2^{13}C_1^{11}C_2^4C_2^4C_1^4=123,552 \text{ 種。其機率為：}\frac{123,552}{C_5^{52}} \approx 0.04754。$$

#### 8. 一對 (one pair)

5 張牌中，有兩張數字相同，另三張皆不同。其組合數：先從 13 個數字中選出 1 個，4 種花色的數字 恰選二張，再從其它 12 個數字中選出 3 個，4 種花色的數字 恰選一張，接著 4 種花色的數字 恰選一張，最後 4 種花色的數字再選一張。

其組合數共有：

$$C_1^{13}C_3^{12}C_2^4C_1^4C_1^4C_1^4=1,098,240 \text{ 種。其機率為：}\frac{1,098,240}{C_5^{52}} \approx 0.42257。$$

#### 9. 其它

即非上述 8 類的牌型，它的組合數為全部的種數  $C_5^{52}$  減去前八類的組合數。其機率亦為 1 減去前 8 類的機率總和。

用數學知識一算，是不是很吃驚呢？其實，數學是在生活中隨處可見的，只要你用心去發現。

四、六張撲克機率計算：

52 張選 6 張會有  $C_6^{52} = 20358520$  種組合

★同花順：188+1656=【1844】

皇家同花順：【10 J Q K A】1 組，花色 4 選 1，47 張選 1 張=  $1*4*47= 188$

普通同花順：【A 2 3 4 5】~【9 10 J Q K】9 組，花色 4 選 1，46 張選 1 張=  $9*4*46= 1656$

★同花順：600+1244=【1844】

同花順+一對：順子 10 組，花色 4 選 1，5\*3 張選 1 張=  $10*4*15= 600$

大順：1 組，花色 4 選 1，號碼 5 選 1，花色 3 選 1，8\*4 張選 1 張=  $1*4*5*3*32=$

1920

大順  $\alpha$ ：1 組，花色 4 選 1，號碼 8 選 1，花色 4 選 2=  $1*4*8*6= 192$

順子：9 組，花色 4 選 1，號碼 5 選 1，花色 3 選 1，31 張選 1 張=  $9*4*5*3*31= 16740$

順子  $\alpha$ ：9 組，花色 4 選 1，號碼 7 選 1，花色 4 選 2，號碼 1 選 1，花色 3 選 2=  $9*4*(7*6+1*3)= 1620$

同花順+散牌：128+1116= 1244

大順：1 組，花色 4 選 1，8\*4 張選 1 張=  $1*4*32= 128$

順子：9 組，花色 4 選 1，31 張選 1 張=  $9*4*31= 1116$

★鐵支：號碼 13 選 1，花色 4 選 4，12\*4 張選 2 張=  $13*1*1128= 【14664】$

★葫蘆：1248+164736=【165984】

3 3：號碼 13 選 2，2 組花色 4 選 3=  $78*16= 1248$

3 2 1：號碼 13 選 1，花色 4 選 3，號碼 12 選 1，花色 4 選 2，11\*4 張選 1 張=  $13*4*12*6*44= 164736$

★同花：6864+200772-1844=【205792】

6	牌型	組合數	機率	
5	同花順 (straight flush)	40	0.000015	*4*39= 200772
同	鐵支 (four of a kind)	624	0.00024	
★同	葫蘆 (full house)	3,744	0.00144	
同	同花 (flush)	5,108	0.00197	頁+一對= 1287*4*15=
77	順 (straight)	10,200	0.00392	
同	三條 (three of a kind)	54,912	0.02113	
	兩對 (two pairs)	123,552	0.04754	
	一對 (one pair)	1,098,240	0.42257	

6 張同花：號碼 13 選 6，花色 4 選 1 =  $1716 \times 4 = 6864$

5 張同花：號碼 13 選 5，花色 4 選 1，8\*3 張選 1 張 =  $1287 \times 4 \times 24 = 123552$

同花順+散牌：1244

★順子：(76800-600)+(290816-5396) = 【361620】

順子+一對：順子 10 組，4 張花色 4 選 1，號碼 5 選 1，1 對花色 4 選 2，減同花  
順+一對 =  $10 \times 256 \times 5 \times 6 - 600 = 76800 - 600$

順子+散牌：32768+258048-5396 = 290816-5396

大順：1 組，5 張花色 4 選 1，8\*4 張選 1 張 =  $1 \times 1024 \times 32 = 32768$

順子：9 組，5 張花色 4 選 1，7\*4 張選 1 張 =  $9 \times 1024 \times 28 = 258048$

同花+順子：順子 71 組，同花 76 組 =  $71 \times 76 = 5396$

★三條：號碼 13 選 1，花色 4 選 3，號碼 12 選 3，3 張花色 4 選 1 =  $13 \times 4 \times 220 \times 64 =$   
【732160】

★兩對：2471040+61776 = 【2532816】

兩對+散牌：號碼 13 選 2，2 對花色 4 選 2，號碼 11 選 2，2 張花色 4 選 1 =  
 $78 \times 36 \times 55 \times 16 =$

2471040

三對：號碼 13 選 3，3 對花色 4 選 2 =  $286 \times 216 = 61776$

★一對：號碼 13 選 5，減順子 10 組，號碼 5 選 1。4 張花色 4 選 1，減同花 2 組，1  
對花色 4 選 2

$(1287 - 10) \times 5 \times (256 - 2) \times 6 = 9884160 - 77220 - 76800 + 600 =$  【9730740】

★一對：9884160-600-(77220-600)-(76800-600) = 【9730740】

一對+散牌：號碼 13 選 1，花色 4 選 2，號碼 12 選 4，4 張花色 4 選 1 =  $13 \times 6 \times 495 \times 256 =$   
9884160

(2)號碼 13 選 5，4 張花色 4 選 1，號碼 5 選 1，花色 4 選 2 =  $1287 \times 256 \times 5 \times 6 = 9884160$

同花順+一對：600

同花+一對：77220-600

順子+一對：76800-600

★散牌：號碼 13 選 6，減順子 71 組。6 張花色 4 選 1，減同花 76 組

$(1716 - 71) \times (4096 - 76) = 7028736 - 130416 - 290816 + 5396 =$  【6612900】

★散牌：7028736-1244-(130416-1244)-(290816-5396) = 6612900

全部散牌：號碼 13 選 6，6 張花色 4 選 1 =  $1716 \times 4096 = 7028736$

同花順+散牌：1244

同花+散牌：130416-1244

順子+散牌：290816-5396

牌型	牌組	機率
----	----	----

同花順	1844	0.009058%
鐵支	14664	0.072029%
葫蘆	165984	0.815305%
同花	205792	1.010840%
順子	361620	1.776259%
三條	732160	3.596332%
兩對	2532816	12.441062%
一對	9730740	47.796893%
散牌	6612900	32.482224%
總計	20358520	

### 參、結論

日常生活中的撲克牌遊戲都有其遊戲規則，因此在各種的撲克牌遊戲中每張牌的意義都不盡相同。因此，將撲克牌已轉化為「結構化」的教具，蘊含著數學知識的學習。對學生來說，在玩撲克牌的過程中，即是持續地練習排列組合及機率相關概念。對教師來說，觀察學生的打牌行為，也可進行檢驗學生概念理解的一種評量形式。撲克牌教學不但將遊戲數學化，也將數學遊戲化了，達到了寓教於樂的目的，在這樣的歷程中已讓學校與日常生活的數學知識結合在一起，二者相輔相成達到良好的學習效果。

### 肆、參考文獻

一、撲克牌型之排列組合與機率。取自 <https://wywu.pixnet.net/blog/post/26525329>

二、組主學習撲克牌的機率。取自

<https://www.pksh.ylc.edu.tw/resource/openfid.php?id=29397>

三、維基百科：撲克牌型。取自 <https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw>